TD 2

Exercice 1 : Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

1. Tout singleton est un fermé de X .
2. Pour tout couple de points distincts de X , il existe un voisinage de l'un qui ne contient pas l'autre.
3. Pour tout point de $x \in X$, $\{x\}$ est l'intersection de tous les voisinages de x .

Exercice 2 :

1. Montrer que dans un espace topologique séparé, tout singleton est fermé.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3 : *Topologie pullback*

Soient X un ensemble et $(Y, \mathcal{T})$ un espace topologique et $f : X \rightarrow Y$ une application.

1. On pose

$$\mathcal{T}_f = \{f^{-1}(O), O \in \mathcal{T}\}.$$

Montrer que $\mathcal{T}_f$ définit une topologie sur X .

2. On suppose que $X \subset Y$ et $\forall x \in X, f(x) = x$. Reconnaitre $\mathcal{T}_f$.
3. On suppose que f est constante. Reconnaitre la topologie $\mathcal{T}_f$.

Exercice 4 : *Topologie image*

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, Y un ensemble et $f : X \rightarrow Y$ une application.

1. Montrer que l'image d'une topologie par une application n'est en général pas une topologie.
2. On pose $\mathcal{T}' = \{O \subset Y, f^{-1}(O) \in \mathcal{T}\}$. Montrer que $\mathcal{T}'$ définit une topologie sur Y .

3. On suppose $\mathcal{T}$ séparée et f injective. Montrer que $\mathcal{T}'$ est aussi séparée.

Exercice 5 :

Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est la réunion **disjointe** d'intervalles ouverts.

Exercice 6 : *Topologie de Zariski*

On admet que tout idéal I de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ est de type fini, c'est à dire engendré par un nombre fini d'éléments. On appelle ensemble algébrique de $\mathbb{C}^n$, un ensemble sur lequel s'annulent tous les polynômes d'un idéal I de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$:

$$\mathcal{F}_I = \{x \in \mathbb{C}^n, \forall P \in I, P(x) = 0\}$$

On note $\mathcal{F}_Z$ l'ensemble de tous les ensembles algébriques de $\mathbb{C}^n$ et enfin, on note

$$\mathcal{T} = \{O \subset \mathbb{C}^n, O^c \in \mathcal{F}_Z\}$$

1. Vérifier que si $I = (P_1, \dots, P_N)$, où $P_1, \dots, P_N \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ alors

$$\mathcal{F}_I = \{x \in \mathbb{C}^n, \forall 1 \leq i \leq N, P_i(x) = 0\}$$

2. Montrer que $(\mathbb{C}^n, \mathcal{T})$ est un espace topologique.
3. Est-elle séparée ?