# TD 3

**Exercice 1 :** Lesquelles des fonctions suivantes donnent une métrique sur $\mathbb{R}$ ?

$$d_1(x,y) = (x-y)^2 \qquad d_2(x,y) = |x-y|^{\frac{1}{2}}$$

$$d_3(x,y) = |x-2y| \qquad d_4(x,y) = |x^2-y^2|.$$

**Exercice 2 :** Soient $d_1$ et $d_2$ deux distance sur $E$ et telles qu'il existe $k>0$ tel que

$$\forall x,y \in E, \quad d_1(x,y) \leq k d_2(x,y)$$

Montrer que la topologie de $(E,d_1)$ est moins fine que celle de $(E,d_2)$.

**Exercice 3 :** *Métrique S.N.C.F.* Soit $d_2$ la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. On fixe un point $p \in \mathbb{R}^2$. Pour $x,y \in \mathbb{R}^2$ on pose :

$$\begin{aligned} D(x,y) &= d_2(x,y) \text{ si } p,x,y \text{ sont alignés}, \\ &= d_2(x,p) + d_2(y,p) \text{ sinon.} \end{aligned}$$

a) Montrer que $D$ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

b) Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.

(i) Dessiner la boule $B_D(p,r)$.

(ii) Soit $m \in \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$. Dessiner la boule $B_D(m,r)$ (distinguer suivant que $r \leq d(p,m)$ ou non).

**Exercice 4 :** Soit $(X,d)$ un espace métrique.

a) Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante s'annulant uniquement en 0 et sous additive, i.e. vérifiant :

$$\forall u,v \in \mathbb{R}_+, \phi(u+v) \leq \phi(u) + \phi(v).$$

Vérifier que $\phi \circ d$ est une distance.

b) Vérifier que l'on peut prendre $\phi(r) = \min(1,r)$ ou $\phi(r) = \frac{r}{1+r}$.

**Exercice 5 :** *lemme de recouvrement de Vitali :*
Soit $(X,d)$ un espace métrique. Soit $(x_i)_{i=1\ldots N} \subset X$ et $(r_i)_{i=1\ldots N} \subset \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe $S \subset [\![1,N]\!]$ telle que les conditions suivantes soient vérifiées

a) $\forall i,j \in S, i \neq j \Rightarrow B_d(x_i,r_i) \cap B_d(x_j,r_j) = \emptyset$,

b) $\bigcup_{i=1}^N B_d(x_i,r_i) \subset \bigcup_{i\in S} B_d(x_i,3r_i)$.

**Exercice 6 :** *Espace ultramétrique,* Soit $E$ un ensemble et $d : E\times E \to \mathbb{R}_+$. On dit que $(E,d)$ est un espace ultramétrique si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} (i)\ \forall x,y \in E,\ d(x,y) = d(y,x), \\ (ii)\ \forall x,y \in E,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \\ (iii)\ \forall x,y,z \in E,\ d(x,y) \leq max(d(x,z),d(z,y)). \end{cases}$$

1) Montrer qu'un espace ultramétrique est un espace métrique.

2) Donner un exemple trivial d'espace ultramétrique. Quels sont les suites convergentes ?

3) Montrer que tout triangle est isocèle.

4) Montrer que tout point d'une boule en est le centre.

5) Montrer que, étant données deux boules, soit elles sont disjointes, soit une est incluse dans l'autre.

6) Montrer que, toute boule ouverte ou fermée est ouverte et fermée.

**Exercice 7 :** *Une topologie métrisable et non discrète sur $\mathbb{Z}$*
Étant donnés $p$ premier et $a \in \mathbb{Z}^*$, on appelle valuation $p$-adique de $a$ la puissance de $p$ dans la décomposition en facteur premier de $a$, et on la note $v_p(a)$. Par convention $v_p(0) = +\infty$. On définit alors $|a|_p := p^{-v_p(a)}$.

1. Montrer que $|.|_p$ définie une distance ultramétrique sur $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que la topologie définie par cette distance n'est pas la topologie discrète.

**Exercice 8 :** Étant donnés $p$ premier et $a \in \mathbb{Z}^*$, on appelle valuation $p$-adique de $a$ la puissance de $p$ dans la décomposition en facteur premier de $a$, et on la note $v_p(a)$. Par convention $v_p(0) = +\infty$. Pour $x = a/b \in \mathbb{Q}$, on définit $v_p(x) = v_p(a) - v_p(b)$ et on pose $|x|_p = p^{-v_p(x)}$.

1. Montrer que $d_p(x, y) = |x - y|_p$ définie une distance ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.
2. $(\mathbb{Q}, |.|_p)$ est-il complet ?

**Exercice 9 :** Soit $\mathbb{K}$ un corps, on note $\mathbb{K}[\![X]\!]$ l'anneau des séries formelles. (i.e. l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni du produit de Cauchy). Pour $S = \sum s_n X^N \in \mathbb{K}[\![X]\!]$, on note $\nu(S)$ la valuation de $S$, définit comme étant le plus petit entier $k$ tel que $s_k \neq 0$ (par convention $\nu(0) = \infty$).
On pose $d(S, R) = e^{-\nu(S-R)}$, avec la convention $e^{-\infty} = 0$.

1) Montrer que $(\mathbb{K}[\![X]\!], d)$ est un espace ultramétrique.
2) Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est dense dans $\mathbb{K}[\![X]\!]$.

**Exercice 10 :** *Séparation des fermés*
Soient $A$,$B$ deux fermés disjoints d'un espace métrique $(E, d)$. Montrer qu'il existe deux ouverts $U$,$V$ de $E$ tels que :

$$A \subset U, \quad B \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset$$

*Indication : On pourra considérer* $x \mapsto \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$