

## TD 4

**Exercice 1 :** Soit  $U$  un ouvert d'un espace topologique. Montrer l'inclusion  $U \subset \overset{\circ}{\bar{U}}$  et donner un exemple d'inclusion stricte.

**Exercice 2 :** Décrire l'intérieur, l'adhérence et la frontière des sous ensembles suivants :

- $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ ;
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{2^{2n+1}}, \frac{1}{2^{2n}}] \subset \mathbb{R}$ ;
- $\{(x, y) \mid x^2 \leq y < x + 1\} \subset \mathbb{R}^2$ ;
- $\{(x, \sin(\frac{1}{x})), x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 3 :** *Topologie codénombrable* Soit  $X$  un ensemble infini et

$$\mathcal{T} = \{O \subset X \mid O^c \text{ est au plus dénombrable}\} \cup \{\emptyset\}.$$

- Déterminer les suites convergentes pour cette topologie.
- En déduire que les suites convergentes ne caractérisent pas la topologie.

**Exercice 4 :** *Topologie cofinie* Soit  $X$  un ensemble et

$$\mathcal{T} = \{O \subset X \mid \text{Card } O^c < \infty\} \cup \{\emptyset\}.$$

Soit  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ . On pose

$$A = \{x \in X \mid \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, x_n = x\}.$$

Etudier la convergence de  $(x_n)$  suivant que  $\text{Card } A \geq 2$ ,  $\text{Card } A = 1$  ou  $\text{Card } A = 0$ .

**Exercice 5 :** Soit  $\mathcal{F}_b([0, 1])$  l'ensemble des fonctions bornées sur  $[0, 1]$ . On le muni de la convergence uniforme. On se donne  $A \subset [0, 1]$  et on considère  $X = \{f \in \mathcal{F}_b([0, 1]) \mid f|_A = 0\}$ . Déterminer la frontière de  $X$ .

**Exercice 6 :** Soit  $X$  un espace métrique séparable, et  $A$  une partie quelconque de  $X$ . Montrer que  $A$  est séparable.

**Exercice 7 :** Soit  $(x_n)_n$  une suite d'un espace métrique  $X$  ; on note  $A$  l'ensemble  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ .

- (a) Montrer que toute valeur d'adhérence de la suite est dans l'adhérence de  $A$ .  
(b) Montrer que tous les points de l'adhérence de  $A$  ne sont pas nécessairement des valeurs d'adhérence de la suite.
- Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est un fermé de  $X$ .
- Réciproquement, on suppose  $X$  séparable. Montrer que tout fermé est l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite. (*Indication : pour un fermé  $F$  infini, on considérera un ensemble dénombrable  $D$  dense et on construira une suite qui prend une infinité de fois chaque valeur de  $D$* )

**Exercice 8 :** *Adhérence des matrices réelles diagonalisables*

- Soit  $P$  un polynôme unitaire à coefficient réel de degré  $d \geq 1$ . Montrer que  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\text{Im}(z)|^d$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $D_n(\mathbb{R})$  les matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  diagonalisables dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que l'adhérence de  $D_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices trigonalisables dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 9 :** Soient  $E$  un espace vectoriel et  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur  $E$ . Montrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes si et seulement si  $N_1$  et  $N_2$  possèdent les mêmes suites convergentes.