

TD 5

Exercice 1 : Soit X et Y des espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$. Montrer l'équivalence des propositions suivantes.

- (i) f est continue
- (ii) $\forall B \subset Y, f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \widehat{f^{-1}(B)}$
- (iii) $\forall B \subset Y, \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$
- (iv) $\forall B \subset Y, \partial f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\partial B)$

Exercice 2 : Soit (X, T) un espace topologique. On munit $X \times X$ de la topologie produit. Montrer que (X, T) est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ est un fermé de $X \times X$.

Exercice 3 : On munit $X = \{0, 1\}$ de la topologie discrète. Montrer que la topologie produit sur X^I est strictement moins fine que la topologie discrète dès que I est infini.

Exercice 4 : Soit $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ muni de la topologie τ dont les ouverts sont les parties U vérifiant les conditions suivantes

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in U \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, a < x < b$ et $]a, b[\subset U$
- (ii) $-\infty \in U \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R},]-\infty, a[\subset U$
- (iii) $+\infty \in U \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R},]a, +\infty[\subset U$

Montrer que $(\overline{\mathbb{R}}, \tau)$ est homéomorphe à $([-1, 1], |\cdot|)$.

Exercice 5 : Soit $\widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ muni de la topologie τ dont les ouverts sont les parties U vérifiant les conditions suivantes

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in U \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, a < x < b$ et $]a, b[\subset U$
- (ii) $\infty \in U \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R},]-\infty, -a[\subset U$ et $]a, +\infty[\subset U$

Montrer que $(\widehat{\mathbb{R}}, \tau)$ est homéomorphe à $(\mathbb{S}^1, |\cdot|)$.

Exercice 6 : Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 7 : On considère la relation d'équivalence sur $[0, 1]$ définie par :

$$x \mathcal{R} y \text{ si et seulement si } \{x, y\} = \{0, 1\} \text{ ou } x = y$$

Montrer que $[0, 1]/\mathcal{R}$ est homéomorphe à S^1 .

Exercice 8 : Soit $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'espaces métriques. Montrer que la topologie produit sur $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ est métrisable. *Indication :* Considérer $d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$.

Exercice 9 : Étant donné (E, τ_E) est un espace topologique, I un ensemble d'indices, X un ensemble et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions de X dans E , on appelle **topologie initiale** induite par les $(f_i)_{i \in I}$, la topologie la moins fine sur X rendant f_i continue pour tout $i \in I$. On la notera ici τ_X^i .

- 1) Montrer qu'une intersection de topologie est une topologie. En déduire que τ_X^i est bien définie.
- 2) Montrer que tout ouvert de τ_X^i s'écrit comme union d'intersection finie de parties de la forme $f_i^{-1}(U)$ avec $i \in I$ et $U \in \tau_E$.
- 3) Soit (H, τ_H) un espace topologique. Montrer que

$$g \in \mathcal{C}^0((H, \tau_H); (X, \tau_x^i)) \iff \forall i \in I, f_i \circ g \in \mathcal{C}^0((H, \tau_H); (E, \tau_E)).$$

- 4) Soit $x_n \in X$, montrer que

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \iff \forall i \in I, f_i(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_i(x).$$

- 5) Si $X \subset E$, $I = \{0\}$ et $\forall x \in X, f_0(x) = x$, montrer que τ_X^i est la topologie induite par (E, τ_E) sur X .
- 6) On pose

$$E = \mathbb{R}, X = l^2(\mathbb{N}) = \{a_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2 < \infty\}.$$

On introduit le produit scalaire de $l^2(\mathbb{N})$

$$\langle a|b \rangle := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n,$$

pour poser $I = l^2(\mathbb{N})$ et $f_i(a) = \langle i|a \rangle$.

- a) Montrer que $\tau_{l^2(\mathbb{N})}^i$ est séparée.
- b) Montrer que $((\mathbb{1}_{k=n})_{n \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- c) On suppose par l'absurde qu'il existe une distance d telle que $\tau_{l^2(\mathbb{N})}^i$ soit la topologie induite par d .
 - i) Si $r > 0$, montrer qu'il existe une suite finie $b^1, \dots, b^N \in l^2(\mathbb{N})$ telle que

$$\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \langle b^j, a \rangle = 0 \Rightarrow a \in B(0, r).$$

- ii) En déduire que si $r > 0$ et $m \in \mathbb{N}$, il existe $a \in B(0, r) \setminus \{0\}$ telle que

$$\# \text{Supp}(a) < \infty, \quad a_n \neq 0 \Rightarrow n \geq m \text{ et } \mathbb{R}a \subset B(0, r).$$

- iii) En déduire qu'il existe $(a^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ à supports finis et disjoints vérifiant

$$\mathbb{R}a^k \subset B(0, \frac{1}{k}).$$

- iv) Conclure que $\tau_{l^2(\mathbb{N})}^i$ n'est pas métrisable.

Indication : Considérer $i_n = \sum_k \frac{a_n^k}{k \|a^k\|}$ et $(\frac{ka^k}{\|a^k\|})$.

Exercice 10 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ injective et $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|.$$

Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$. Etudier l'équivalence métrique et topologique avec la distance usuelle $|x - y|$ dans les cas $f(x) = x^3$ et $f(x) = \arctan(x)$.

Exercice 11 : Soit $f : X \rightarrow Y$. On dit que f est séquentiellement continue si pour toute suite (x_n) de X , $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$.

- a) Montrer que si X est un espace métrique alors f est continue si et seulement si elle est séquentiellement continue.
- b) Proposer un exemple de fonction surjective séquentiellement continue mais non continue.