TD 6

Exercice 1 : Soient X un espace topologique et $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts connexes non vides de X , deux à deux disjoints tels que $X = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Montrer que les Ω_i sont les composantes connexes de X . Le résultat est-il vrai si on remplace "ouverts" par "fermés" ?

Exercice 2 : Déterminer les parties connexes de $\mathbb{Q}$.

Exercice 3 : Montrer que, sur Terre, il existe deux points antipodaux ayant même température.

Exercice 4 : Soient A et B deux parties d'un espace topologique (E, τ) telles que

$$A \subset B \subset \overline{A}.$$

Montrer que si A est connexe alors B est connexe.

Exercice 5 : Soient E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert connexe de E et $f : U \rightarrow F$ une application différentiable sur U telle que $\forall x \in U, df(x) = 0_{\mathcal{L}_c(E, F)}$. Montrer que f est constante.

Exercice 6 : Montrer qu'il n'existe pas d'injection continue de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7 : Montrer que si A et B sont deux parties connexes d'un espace topologique (E, τ) telles que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ alors $A \cup B$ est connexe. Est-ce encore vrai en supposant seulement $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$?

Exercice 8 : *Théorème de Darboux*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Indication : On pourra considérer l'ensemble des taux d'accroissement de f .

Exercice 9 : Montrer qu'un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

Exercice 10 : Soit D une partie dénombrable de $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{C} \setminus D$ est connexe par arcs. En déduire que $GL_N(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.