TD 7

Exercice 1 : Soient X un ensemble.

1. On suppose que X est muni de la topologie discrète et que X est compact. Montrer que X est de cardinal fini.
2. On suppose que $X = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est muni de sa topologie naturelle. X est-il compact ?

Exercice 2 : Soient A, et B deux compacts disjoints d'un espace topologique X. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V tels que

$$A \subset U, \quad B \subset V \quad \text{ et } U \cap V = \emptyset$$

Exercice 3 : Soit X un espace métrique. Soit $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite L. Montrer que $K = \{L\} \cup \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est compact.

Exercice 4 : Montrer qu'un espace métrique compact est séparable.

Exercice 5 : Soit K un compact métrique et $f : K \to K$ vérifiant

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \text{ si } x \neq y.$$

Montrer que f possède un unique point fixe.

Exercice 6 : *Théorème de Dini*
Soit (E, τ) un espace topologique compact. Montrer que si $(f_n)_n$ est une suite décroissante de $\mathcal{C}^0(E; \mathbb{R})$ qui converge simplement vers $f \in \mathcal{C}^0(E; \mathbb{R})$ alors elle converge uniformément. L'hypothèse f continue est-elle nécéssaire ?

Exercice 7 : Soit (X, τ) un espace topologique. On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement (s.c.i.) en x si

$$\forall \epsilon > 0, \exists U \in \tau, \forall y \in U, \ x \in U \text{ et } f(x) - \epsilon < f(y).$$

1) Soit A un ouvert de X. Montrer que $\mathbb{1}_A$ est s.c.i..
2) Soit $x_n \in X$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et soit f s.c.i. en x, montrer que

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

3) On suppose que X est métrique compact et f s.c.i.. Montrer que f atteint son infimum.
4) On suppose que X est compact et f s.c.i.. Montrer que f atteint son infimum.
Indication : Considérer des ensembles du type $X_t := \{x \mid f(x) > t\}$.

Exercice 8 :

a) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une bijection continue telle que $\lim_{x\to\infty} ||f(x)|| = \infty$. Montrer que f est un homéomorphisme.
b) Soient (X, τ_X) et (Y, τ_Y) des espaces topologiques. On suppose que X est compact et Y séparé. On se donne enfin $f : X \to Y$ injective et continue. Montrer que X est homéomorphe à son image par f.

Exercice 9 : Montrer que les parties compactes de $l^1(\mathbb{N})$ sont les fermés bornés K vérifiant

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{u\in K} \sum_{n\geq N} |u_n| = 0.$$