Problème sur les dérivées, les trinômes, et les suites

Pierre Donat-Bouillud

27 janvier 2013

L'objectif de ce problème est de trouver toutes les fonctions dérivables qui vérifient l'équation 1, et d'étudier quelques propriétés de ces solutions.

1 Une équation fonctionnelle.

Considérons l'équation 1.

$$\mathrm{f}(x) \times (\mathrm{f}(x) - 1) = \frac{x}{2} \text{ où } x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

1.1 Exploration.

1) Exprimer les deux membres de l'équation pour $x = 0$. En déduire les valeurs possibles de f(0).

2) Faire de même pour $x = 1$.

3) Dériver les deux membres de l'équation. En déduire les valeurs possibles de $\mathrm{f}'(0)$.

4) Que remarque-t-on pour $x = -2$ dans l'équation 1 ?

1.2 Une approche plus générale.

L'approche précédente semble pouvoir donner des valeurs de $\mathrm{f}(x)$ pour $x = 0$, pour $x = 1$, ainsi que des valeurs de sa dérivée. Pourrait-on généraliser cette approche ?

5) On prend un $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Posons $\mathrm{f}(x) = F$. Réécrire l'équation sous la forme d'un trinôme de la variable F.

6) Résoudre le trinôme et en déduire que $\mathrm{f}(x) = \frac{1+\sqrt{1+2x}}{2}$ ou $\mathrm{f}(x) = \frac{1-\sqrt{1+2x}}{2}$.

On notera f_1 la première solution, f_2 la seconde.

2 Etude des solutions

On ne manquera pas de vérifier la justesse de ses calculs en comparant avec les résultats trouvés dans la partie *Exploration*.

2.1 Etude générale.

7) Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f_1 et de f_2 ?

8) Montrer la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ \mathrm{f}_1(x)^2 + \mathrm{f}_2(x)^2 = 1 + x \tag{2}$$

9) Calculer $f_1(x) \times f_2(x)$ pour $x \in \mathcal{D}$. Pouvait-on savoir à l'avance le résultat à partir des coefficients du trinôme obtenu dans la partie précédente ?

2.2 Étude du sens de variation de f_1 et de f_2.

10) Montrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ \mathrm{f}_1\prime(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+2x}} \tag{3}$$

11) En déduire le sens de variation de f_1, puis de f_2.

12) Retrouver le sens de variation de f_1 en utilisant les fonctions composées.

13) Dresser un tableau de variation et indiquer les valeurs ou limites aux bornes de l'ensemble de définition $\mathcal{D}$.

14) Calculer la dérivée de $g : x \mapsto \mathrm{f}_1(x)^2 + \mathrm{f}_2(x)^2$ pour $x \in \mathcal{D}$, en justifiant bien de son existence, et dresser son tableau de variation.

2.3 Propriétés graphiques.

15) Tracer les courbes représentatives de f_1 et de f_2. On note $\mathcal{C}$ la réunion des graphes de f_1 et de f_2. A quelle fonction vous fait penser la courbe $\mathcal{C}$?

f_1 est une fonction de la variable x : $\mathrm{f}_1(x)$ est la valeur de f_1 pour une abscisse donnée x. Pour vérifier notre intuition de la question précédente, on va exprimer les points sur la courbe $\mathcal{C}$ en fonction de l'ordonnée y.

C'est comme si on tournait la feuille de papier de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique.

16) Écrivez $y = \mathrm{f}_1(x)$ puis exprimer x en fonction de y. En déduire une fonction h telle que :

$$x = h(y) \tag{4}$$

Remarquez qu'on obtient le même h si on suit la même démarche avec f_2. Votre intuition est-elle vérifiée ?

3 Un peu de suite dans les idées...

3.1 Étude d'une suite définie à partir de $\mathrm{f}_1(x)^2 + \mathrm{f}_2(x)^2$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = \mathrm{f}_1(u_n)^2 + \mathrm{f}_2(u_n)^2 \\ & u_0 = 0 \end{array} \right. \tag{5}$$

17) Calculer u_1, u_2, et u_3.

18) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

19) Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$?

3.2 Suite définie à partir de f_2.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall n \in \mathbb{N}, & v_{n+1} = \mathrm{f}_2(v_n) \\ & v_0 = 0 \end{array} \right. \tag{6}$$

20) Calculer v_1, v_2, v_3, et v_{10}.

21) Calculer v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.3 Suite définie à partir de f_1.

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall n \in \mathbb{N}, & w_{n+1} = \mathrm{f}_1(w_n) \\ & w_0 = 0 \end{array} \right. \tag{7}$$

22) Calculer w_1, w_2, et w_3.

23) Étudier le sens de variation de (w_n), en utilisant l'étude de variation de f_1 faite dans la partie 2.2.

24) Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$?