Magistère de mathématiques

TP5 – Équations non-linéaires

Exercice 1. *Ordre de convergence de méthodes numériques*

Considérons l'équation suivante, d'inconnue réelle x :

$$\sqrt{1+x^2} = \cosh(x-1). \tag{1}$$

a. Par l'analyse, déterminer le nombre de solutions de cette équation, ainsi que pour chacune, un intervalle de longueur 1 la contenant.

b. Programmer successivement la méthode de la corde, de la sécante et de Newton pour identifier une valeur approchée aussi précise que possible de chacune des solutions. Dans chacun des cas on considérera 10 itérations.

c. Expliquer ce qui se produit dans le cas de la méthode de la sécante.

d. Pour chacune des méthodes précédentes, stocker les itérations successives et les afficher de sorte à observer à l'œil la croissance effective du nombre de décimales exactes.

e. Pour tout $k \in \{1, \dots, 10\}$, on note $e_k = |x_k - x^\star|$, où x_k désigne l'approximation donnée par chaque méthode après k itérations et $x^\star$ est l'approximation donnée par la méthode de Newton après 30 itérations. Tracer en échelle logarithmique la quantité e_k en abscisse et e_{k+1} en ordonnée, et quantifier l'ordre de convergence effectif de chaque méthode.
On pourra superposer au tracer les droites de pente 1, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et 2.

Exercice 2. *Systèmes d'équations non-linéaires*

On souhaite déterminer les points d'intersection dans $\mathbb{R}^2$ entre les courbes d'équations cartésiennes suivantes :

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ \exp(y + y^2) = 2 + \sin(x) \end{cases} \tag{2}$$

a. Définir une fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont les zéros sont les solutions du système précédent et calculer sur le papier sa différentielle en tout point.

b. Implémenter cette fonction et la matrice jacobienne représentant sa différentielle.

c. Utiliser la méthode de Newton pour déterminer les zéros de F à partir de la donnée initiale $(x, y) = (1, 0)$, puis de la donnée $(x, y) = (-1, 0)$. On mènera l'algorithme sur 15 itérations dans chacun des cas.

d. Tracer les courbes d'erreurs comme dans l'exercice précédent.

Exercice 3. *Méthode d'homotopie*

On considère l'équation suivante dépendant d'un paramètre $\mu \in \mathbb{R}$, d'inconnue réelle $x(\mu)$:

$$x \exp(x) = \mu. \tag{3}$$

Lorsque $\mu = 0$, l'unique solution est $x(0) = 0$. Introduisons un petit paramètre $h > 0$ de votre choix.

a. Considérons à présent $\mu = h$, et déterminons la solution $x(h)$ correspondante. Mettre en œuvre la méthode de Newton à partir de l'initialisation $x(0)$ pour déterminer $x(h)$.

b. Poursuivre la méthode, en augmentant progressivement la valeur du paramètre μ par pas de h, et en obtenant les valeurs de la solution $x(\mu)$ correspondante.

c. Déterminer également les solutions pour les valeurs du paramètre $\mu \in]-1, 0]$.