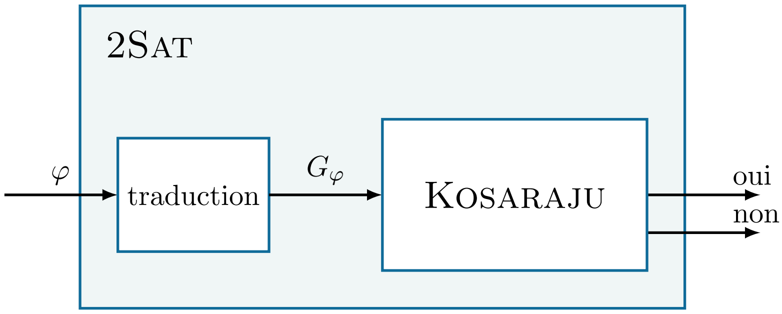
2Sat est dans P

On va étudier le problème 2SAT.

$\boxed{\text{2SAT}}$ $\begin{cases} \underline{\text{entrée}} : & \text{une formule } \varphi \text{ en calcul propositionnel sous forme normale} \\ & \text{conjonctive avec 2 littéraux par clause ;} \\ \underline{\text{sortie}} : & \text{oui si } \varphi \text{ est satisfiable, non sinon.} \end{cases}$

Théorème 1. Le problème 2SAT est dans P.

Démonstration. On va réduire le problème 2SAT au problème des composantes fortement connexes. On peut trouver les composantes fortement connexes grâce à l'algorithme de Kosaraju.

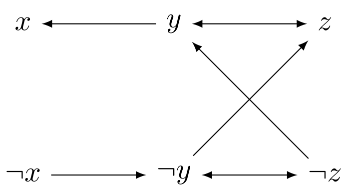


Soit φ une forme sous forme CNF avec 2 littéraux par clause. On pose le graphe $G_\varphi = (S, A)$ avec

$$S = \{x, \neg x, x \in VAR(\varphi)\}$$
$$A = \{(\neg a, b), (\neg b, a) \text{ pour } a \vee b \in \varphi\}$$

ici a et b sont des littéraux.

<u>**Exemple :**</u> La formule $\varphi = (x \vee \neg y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (y \vee \neg z) \wedge (y \vee z)$ donne le graphe G_φ suivant :



On veut montrer que

φ est satisfiable $\iff$ pour tout $x \in VAR(\varphi)$, x et $\neg x$ ne sont pas dans la même composante fortement connexe

$\boxed{\implies}$ Soit ν une valuation satisfaisant φ.

Montrons que s'il existe un chemin de a à b et $\nu(a) = 1$, alors on a $\nu(b) = 1$, par récurrence sur la longueur n du chemin de a à b.

<u>Initialisation</u> : Pour $n = 1$, $(a, b) \in A$, donc $\neg a \vee b$ est une clause de φ. Comme $\nu(a) = 1$, on a $\nu(\neg a) = 0$, il faut donc que $\nu(b) = 1$ pour satisfaire φ.

<u>Hérédité</u> : Soit un chemin $a_0 \to a_1 \to \cdots \to a_{n+1}$ avec $\nu(a_0) = 1$. Par hypothèse de récurrence au rang n, on a $\nu(a_n) = 1$, puis, comme pour l'initialisation, on trouve que $\nu(a_{n+1}) = 1$.

<u>Conclusion</u> : Pour tout chemin de a à b de G_φ avec $\nu(a) = 1$, on a $\nu(b) = 1$.

Par l'absurde, si pour un certain $x \in VAR(\varphi)$, x et $\neg x$ était dans la même composante fortement connexe, on aurait un chemin de x à $\neg x$ et un chemin de $\neg x$ à x.

Supposons que $\nu(x) = 1$, alors $\nu(\neg x) = 1$, contradiction avec le résultat de la récurrence. De même, si $\nu(\neg x) = 1$, on aurait $\nu(x) = 1$, contradiction.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que pour tout $x \in VAR(\varphi)$, x et $\neg x$ ne sont pas dans la même composante fortement connexe.

On va créer une valuation qui satisfait φ.

1)
- S'il existe un chemin de $\neg l$ à l (où l est un littéral), alors on pose $\nu(l) = 1$ et $\nu(\neg l) = 0$.
- Pour tout $l' \in \varphi$ tel qu'il existe un chemin de l à l' (avec $\nu(l) = 1$), on pose $\nu(l') = 1$.

   On itère le procédé jusqu'à saturation.

2) S'il reste des variables $x \in VAR(\varphi)$ sans affectation, on lui assigne 1 ainsi qu'à tous les l' tel qu'il existe un chemin de x à l'.

Vérifions que c'est vraiment une valuation, autrement dit, que l'on n'a pas affecté 0 et 1 à la même variable.

Par l'absurde, si pendant la phase 1), on a mis des variables x à 0 et à 1, c'est que l'on a

$$\neg l_1 \to^* l_1 \to^* x$$
$$\neg l_2 \to^* l_2 \to^* \neg x$$

Or, on peut remarquer que si $a \to^* b \in G_\varphi$, alors $\neg b \to^* \neg a \in G_\varphi$. Ainsi, on a

$$\neg x \to^* \neg l_1 \quad \text{et} \quad x \to^* \neg l_2$$

Ainsi, en mettant bout à bout les chemins, on trouve

$$l_1 \to^* \neg l_1$$

Absurde, car par hypothèse l_1 et $\neg l_1$ ne sont pas dans la même composante fortement connexe et on avait déjà $\neg l_1 \to^* l_1$.

Pour la phase 2), on procède de la même façon.

Montrons maintenant que cette valuation satisfait φ.

C'est le cas puisque s'il existe un chemin de l à l' avec $\nu(l) = 1$, alors $\nu(l') = 1$. De plus, toute clause $a \vee b \in \varphi$, on a un chemin $\neg a \to b$ et un chemin $\neg b \to a$. Ainsi, la clause $a \vee b$ est satisfaite par ν. $\square$

Remarques :

Pour être plus précis, le problème 2SAT est dans NL.