Conventions Transformation de Fourier

Convention 1 : (Celle que j'ai choisie)

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx}$$

Avantage : ressemble à la convention des coefficients de Fourier pour des fonctions 2π-périodiques qui coïncide avec les séries de Fourier.

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, dt$$

et quand la série de Fourier coïncide avec la fonction on a

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$$

On a donc une convention où l'on a jamais de 2π dans l'exponentielle et on peut retrouver la série de fourier grâce au noyau de Dirichlet conventionnel $D_N(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e^{int}$ avec $S_N(f)(t) = (D_N \star f)(t)$. En dimension d, la notation est similaire, en mettant un produit scalaire dans l'exponentielle

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle \xi, x \rangle} dx$$

Inconvénient : change la formule sommatoire de Poisson (ou du moins fait apparaitre un facteur 2π au dénominateur), fait apparaitre un 2π au dénominateur pour la transformée de Fourier inverse

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

Convention 2 :

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx}$$

Avantage : possède le même facteur multiplicatif que la transformée de Fourier inverse

Inconvénient : change la formule sommatoire de Poisson et on a un facteur $\sqrt{2\pi}$ qui se balade tout le temps

Convention 3 :

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x} dx}$$

Avantage : la formule sommatoire de Poisson est simple à écrire

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)$$

Elle est appliquée en $x = 0$ ici, mais en général on a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{2i\pi nx}$$

Inconvénient : il faut revoir toutes les définitions de noyau de Dirichlet, pour le coefficient de Fourier, on est dans une convention ou la période devient 1 et on a des 2π qui apparaissent un peu partout dans les exponentielles. Le coefficient de Fourier devient

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi nt} dt$$

Remarques :
On s'est occupé de la dimension 1 ici. En dimension d, la convention 1 est très similaire. Pour la convention 2, on met le facteur multiplicatif à la puissance d.