D'Alembert Gauss avec Théorème d'Inversion Locale

Théorème 1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, alors P est scindé.

Démonstration. On va montrer que $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Ainsi il existe α tel que $P(\alpha) = 0$, on peut donc factoriser P par $(X - \alpha)$, *i.e.* $P = (X - \alpha)Q$. Ensuite on recommence avec Q jusqu'à ce que le polynôme soit constant.

Pour montrer que $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, on pose

$$A = \{z \in \mathbb{C}, \quad P'(z) = 0\}$$

Étape 1 : *Montrons que $\mathbb{C}\backslash P(A)$ est connexe.*

Cet ensemble est bien connexe, car il est connexe par arcs. En effet, $P(A)$ est fini car A est fini puisque P est de degré fini. Donc, comme on enlève un nombre fini de points à $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}\backslash P(A)$ est connexe par arcs.

Étape 2 : *Montrons que $P(\mathbb{C})\backslash P(A)$ est ouvert dans $\mathbb{C}\backslash P(A)$.*

Soit $P(y) = z \in P(\mathbb{C})\backslash P(A)$. On a $P'(y) \neq 0$ donc il existe, par le théorème d'inversion locale, un voisinage ouvert $\mathcal{V}_y$ contenant y et un voisinage ouvert $\mathcal{V}_z$ contenant z tels que

$$P : \mathcal{V}_y \to \mathcal{V}_z \text{ est un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme}$$

Le voisinage $\mathcal{V}_z = P(\mathcal{V}_y) \subset \mathbb{C}\backslash P(A)$ est un ouvert qui contient z. Donc $P(\mathbb{C})\backslash P(A)$ est ouvert dans $\mathbb{C}\backslash P(A)$.

Étape 3 : *Montrons que $P(\mathbb{C})\backslash P(A)$ est fermé dans $\mathbb{C}\backslash P(A)$.*

Soit $(z_n) \in (P(\mathbb{C})\backslash P(A))^{\mathbb{N}}$ telle que $z_n \to z \in \mathbb{C}\backslash P(A)$. On veut montrer que $z \in P(\mathbb{C})\backslash P(A)$. On a $z_n = P(y_n)$ et (z_n) bornée puisque z_n converge. Ainsi (y_n) bornée car $|P(z)| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} +\infty$ [1]

Donc il existe une sous-suite $(y_{\phi(n)})$ qui converge vers un certain y. On a, par continuité de P, que $P(y_{\phi(n)}) \xrightarrow[n\infty]{} P(y)$ et $P(y_{\phi(n)}) \xrightarrow[n\infty]{} z$. Ainsi $z = P(y)$, or $z \notin P(A)$, donc $P(y) \notin P(A)$. On peut donc conclure que $z \in P(\mathbb{C})\backslash P(A)$ et $P(\mathbb{C})\backslash P(A)$ est fermé dans $\mathbb{C}\backslash P(A)$.

Étape 4 : *Conclusion.*

Comme $\mathbb{C}\backslash P(A)$ est connexe, que $P(\mathbb{C})\backslash P(A)$ est non vide (puisque $P(A)$ est fini et $P(\mathbb{C})$ est infini) et que $P(\mathbb{C})\backslash P(A)$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{C}\backslash P(A)$, alors $P(\mathbb{C})\backslash P(A) = \mathbb{C}\backslash P(A)$.

Ainsi $\mathbb{C}\backslash P(A) \subset P(\mathbb{C})$ et $P(A) \subset P(\mathbb{C})$, donc $\mathbb{C} \subset P(\mathbb{C})$. Puisque $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$, on peut conclure que

$$P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$$

Ce qui achève la preuve. □

1. En effet,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=0}^{n} a_i z^i\right| &\geqslant \left| |a_n||z|^n - \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i\right| \right| \\ &\geqslant |z|^n \left| |a_n| - \underbrace{\left|\frac{1}{|z|^n}\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i\right|}_{\xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0} \right| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} +\infty\end{aligned}$$