Equivalence des normes non respectée

On pose l'espace vectoriel

$$E = \{a + \sqrt{2}b, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

est un espace vectoriel de dimension 2. Donc il est de dimension finie.

On choisit deux normes différentes :

— $N_1(a + \sqrt{2}b) = |a + \sqrt{2}b|$

— $N_2(a + \sqrt{2}b) = |a| + |b|$

Ce sont bien des normes [1].

On pose la suite

$$x_n = (1 - \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

On a le résultat suivant :

$$N_1(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ car } |1 - \sqrt{2}| < 1$$

De plus,

$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

On le voit en développant le binôme de Newton [2].

Ainsi

$$a_n = \frac{(1 - \sqrt{2})^n + (1 + \sqrt{2})^n}{2}$$

Donc $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Cela prouve que

$$N_2(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \text{ car } N_2(x_n) \geqslant |a_n|$$

Or si les normes N_1 et N_2 étaient équivalentes on aurait $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x) \text{ pour tout } x \in E$$

Or

$$N_1(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ et } N_2(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

On aboutit à une contradiction ! Pourquoi ? Il n'y a donc pas équivalence des normes en dimension finie ? ? ?

Solution sur la page suivante

1. N_1 est liée à la valeur absolue, N_2 est la norme 1 usuelle, il suffit de faire les calculs pour s'en convaincre, mais c'est vrai !

2. $(1 + \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k$ et $(1 - \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \sqrt{2}^k$, il faut séparer les k pair et impair.

Il y a équivalence des normes en dimension sur un $\boxed{\underline{\mathbb{R}}\text{- espace vectoriel}}$
Et ici, on était sur $\mathbb{Q}$.

Le problème est que dans la preuve de l'équivalence des normes, on a besoin du caractère compact de $\mathbb{S}^1$, or sur $\mathbb{Q}$ ce n'est pas vrai !
En fait, il suffit que le corps de l'espace vectoriel soit complet.[3]

3. Et $\mathbb{Q}$ n'est pas complet ! Oui bon ça va, on a compris !