Exercices classiques

Voici quelques exercices classiques qu'il faut savoir faire en arrivant à l'agrégation.

1. Montrer que si $X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$ avec $np_n \to \lambda$, alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{Loi} X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.
2. Donner tous les automorphismes de corps de $\mathbb{R}$ (attention, ils ne sont pas forcément continus).
3. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ n'admet pas de sous-groupe arbitrairement petit.
4. Montrer le théorème de point fixe de Picard :
   Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une fonction contractante (qui vérifie $d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y)$ pour tout $x, y \in E$ avec $k < 1$). Alors f admet un unique point fixe a dans E et pour tout $x_0 \in E$, la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a et on a
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(x_n, a) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$
5. Montrer que $\mathbb{F}_q^\times$ est cyclique (pour $q = p^\alpha$ avec p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$).
6. Montrer la décomposition polaire :
   Soient $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^t MM = I_n\}$ et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.
   $$\phi : \begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto & OS \end{array} \text{ est une bijection.}$$
7. Soit E un espace préhilbertien. Démontrer l'inégalité de Cauchy–Schwarz
   $$\forall x, y \in E, \quad |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|.$$
8. Montrer que les sous groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ ou sont denses dans $\mathbb{R}$.
9. Montrer le théorème de Riesz : Soit E un espace vectoriel normé, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) E est de dimension finie ;
   (ii) la boule unité fermée $\overline{B_E(0, 1)}$ est compacte.
10. Montrer qu'un anneau fini commutatif intègre est un corps.
11. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ est primitif si son contenu (pgcd de ses coefficients) vaut 1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
    (i) P est irréductible sur $\mathbb{Z}$;
    (ii) P est primitif et P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
12. Calculer la différentielle de $\left\{ \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array} \right.$.
13. Montrer le théorème de projection sur un convexe fermé [1]
14. Montrer le critère d'irréductibilité d'Eisenstein :
    Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$, s'il existe un nombre premier p qui vérifie :
    — $p | a_i, \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}$
    — $p \nmid a_n$

1. utiliser l'identité du parallélogramme

— $p^2 \nmid a_0$

Alors P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

15. Montrer que l'on ne peut pas engendrer $\mathfrak{S}_n$ avec moins de $n-1$ transpositions.
16. Montrer qu'une suite de Cauchy dont une sous-suite converge est convergente.
17. Calculer la valeur de l'intégrale de Dirichlet :
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$
18. Montrer que
$$\zeta(z) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - p^{-z}\right)^{-1},$$
où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
19. Montrer le théorème de prolongement des fonctions uniformément continues :
Soient (E, d_E) un espace métrique, (F, d_F) un espace métrique complet, D dense dans E et $f : D \to F$ une application uniformément continue. Alors il existe un unique prolongement $\tilde{f} : E \to F$ de f.
20. Montrer que le polynôme $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ mais réductible sur tous les $\mathbb{F}_p$.[2]
21. Montrer le théorème de Heine : Soient K un espace métrique compact et f une fonction continue de K dans $\mathbb{R}$, alors f est uniformément continue.
22. Montrer le théorème de Wilson :
$$p \text{ premier} \quad \text{si et seulement si} \quad (p-1)! \equiv -1 \; [p].$$
23. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.
24. Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sin u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
25. Combien il y a de coloriage du cube avec 3 couleurs ?
26. Montrer l'homéomorphisme $\exp : \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ où $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques réelles et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques définies positives réelles.
27. Donner un exemple de suite de fonctions telle que l'on ne peut pas intervertir la limite et le signe intégral.
28. Montrer la formule de Stirling :
$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$
29. Montrer la décomposition QR :
Soient $U_n(\mathbb{C})$ le groupe unitaire $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M^*M = I_n\}$ et $T_n^{++}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices triangulaire à diagonale réelle strictement positive.
$$\phi : \begin{array}{ccc} U_n(\mathbb{C}) \times T_n^{++}(\mathbb{C}) & \to & GL_n(\mathbb{C}) \\ (Q, R) & \mapsto & QR \end{array} \text{ est une bijection.}$$
30. Montrer que la fonction de répartition $F_X : t \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant t)$ caractérise la loi de X.

2. Ainsi, il n'existe pas de réciproque au critère d'irréductibilité modulaire

31. Montrer les théorèmes de Dini :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que (f_n) converge simplement vers une fonction continue f. Alors (f_n) converge uniformément vers f.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que (f_n) converge simplement vers une fonction continue f. Alors (f_n) converge uniformément vers f.
32. Soit X un ensemble fini, soit G un groupe fini agissant sur X. On note $(x_i)_{i=1}^r$ une famille de représentants des orbites. Montrer la formule des classes :
$$|X| = \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}(x_i)|},$$
où $\mathrm{Stab}(x)$ désigne le stabilisateur de x, autrement dit $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G, g \cdot x = x\}$.
33. Montrer le lemme de Riemann–Lebesgue :
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction 2π périodique. Alors
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
34. Calculer la différentielle du déterminant det : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \det A \end{array}\right.$.
35. Soient α et β deux réels. On sait que$\{\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{\alpha}{\beta}$ est irrationnel. Utiliser ce résultat pour démontrer que $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\sin(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1,1]$.
36. Montrer le théorème de Liouville :
Si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui est bornée, alors elle est constante.
37. Montrer que le seul morphisme non trivial de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ est la signature.
38. Montrer le lemme des noyaux :
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \prod_{i=1}^{n} Q_i \in \mathbb{K}[X]$ où les (Q_i) sont deux à deux premiers entre eux, alors on a
$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker Q_i(u).$$
39. Montrer que l'on ne peut pas truquer deux dés à 6 faces afin d'obtenir une loi uniforme sur leur somme. [3]
40. Montrer que
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$
41. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Résoudre l'équation différentielle $y' = py + qy^{\alpha}$ pour $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues données.
42. Montrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}), {}^t MM = I_n\}$ est compact.
43. Montrer le critère des séries alternées :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite décroissante qui tend vers 0, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge. De plus, son reste $R_n = \sum_{k\geqslant n+1} (-1)^k u_k$ est majoré par $|u_{n+1}|$.

3. utiliser la fonction génératrice

44. Montrer la formule de Burnside :
Soit G un groupe fini (de cardinal $|G|$) agissant sur un ensemble X, on note r le nombre d'orbites de cette action et on note $\mathrm{Fix}(g)$ l'ensemble $\{x \in X, g.x = x\}$. Alors on a
$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Fix}(g).$$
45. Montrer le théorème spectral :
Si A est une matrice symétrique réelle, alors elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
46. Montrer le théorème d'Alembert Gauss[4] :
Si $P \in \mathbb{C}[X]$ n'est pas constant, alors il admet une racine dans $\mathbb{C}$. *i.e.* Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.
47. Calculer
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega t)}{1+t^2} dt \qquad \text{pour } \omega > 0.$$ [5]
48. Montrer le théorème de point fixe compact :
Soit (K, d) un espace métrique compact. Si f est une fonction de K dans K vérifiant
$$d(f(x), f(y) < d(x, y),$$
alors f admet un unique point fixe dans K.
49. Montrer que la limite uniforme d'une suite de polynômes sur $\mathbb{R}$ est un polynôme.
50. Montrer que $\frac{2}{e} < 1$.
51. Combien existe-t-i de collier de perles avec 4 perles bleues, 3 perles blanches et 2 perles rouges ? (sachant qu'on peut faire coulisser les perles sur tout le collier qui est circulaire)
52. Montrer le théorème de Césaro :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers l. Alors on a
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = l$$
53. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ donne un graphe connexe mais non connexe par arcs dans $\mathbb{R}^2$.
54. Calculer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
55. Montrer le théorème de Cayley–Hamilton :
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\chi_u(u) = 0$ où χ_u désigne le polynôme caractéristique de u.
56. Montrer que la somme des inverses des nombres premiers diverge.
57. Calculer le déterminant d'une matrice de Van der Monde.
58. Montrer que A/I est un corps si et seulement si I est un idéal maximal de l'anneau A. Montrer que A/I est intègre si et seulement si I est un idéal premier de l'anneau A.
59. Calculer le rayon de convergence de
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(n!))^a}{(n!)^b} z^n.$$

4. on peut utiliser le théorème d'inversion locale, ou le théorème de Liouville, par exemple...
5. utiliser le théorème des résidus, on doit trouver $\frac{\pi e^{-\omega}}{2}$.