Fonctions μ-récursives usuelles

Les fonctions de base des fonctions primitives récursives :

$$\mathsf{zéro} : \begin{cases} \backslash & \to & \mathbb{N} \\ & \mapsto & 0 \end{cases} \qquad \text{d'arité } 0$$

$$\mathsf{succ} : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x+1 \end{cases} \qquad \text{d'arité } 1$$

$$\pi_i^n : \begin{cases} \mathbb{N}^n & \to & \mathbb{N} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & x_i \end{cases} \qquad \text{d'arité } n$$

L'ensemble des fonctions primitives récursives est clos par composition :
Si φ est d'arité k et $\psi_1, \dots, \psi_k$ sont d'arité n, alors on peut définir

$$\mathsf{comp}(\varphi, \psi_1, \dots, \psi_k) : \begin{cases} \mathbb{N}^n & \to & \mathbb{N} \\ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \varphi(\psi_1(\vec{x}), \dots, \psi_k(\vec{x})) \end{cases} \qquad \text{d'arité } n$$

On notera $\circ(\varphi, \psi_1, \dots, \psi_k)$ pour $\mathsf{comp}(\varphi, \psi_1, \dots, \psi_k)$

L'ensemble des fonctions primitives récursives est clos par récursion primitive :
Si f est d'arité n et g sont d'arité $n+2$, alors on peut définir

$$\mathsf{rec}(f, g) : \begin{cases} \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (\vec{x}, k) & \mapsto & \begin{cases} f(\vec{x}) & \text{si } k = 0 \\ g(\vec{x}, k-1, \mathsf{rec}(f,g)(\vec{x}, k-1)) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \qquad \text{d'arité } n+1$$

Voici quelques fonctions primitives récursives que l'on peut construire :

- plus : $\begin{cases} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x, y) & \mapsto & x+y \end{cases}$ d'arité 2

$$\mathsf{plus} = \mathsf{rec}(\pi_1^1, \circ(\mathsf{succ}, \pi_3^3))$$

- mult : $\begin{cases} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x, y) & \mapsto & x \times y \end{cases}$ d'arité 2

$$\mathsf{mult} = \mathsf{rec}(\mathsf{zero}, \circ(\mathsf{plus}, \pi_1^3, \pi_3^3))$$

- power : $\begin{cases} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x, y) & \mapsto & x^y \end{cases}$ d'arité 2

$$\mathsf{power} = \mathsf{rec}(\mathsf{succ}(\mathsf{zero}), \circ(\mathsf{mult}, \pi_1^3, \pi_3^3))$$ [1]

- prédecesseur : $\begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ k & \mapsto & \begin{cases} k-1 & \text{si } k > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ d'arité 1

$$\mathsf{pred} = \mathsf{rec}(\mathsf{zero}, \pi_2^3)$$

- diff : $\begin{cases} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} x-y & \text{si } x-y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ d'arité 2

$$\mathsf{diff} = \mathsf{rec}(\mathsf{zero}, \circ(\mathsf{pred}, \pi_3^3))$$

<u>Minimisation bornée :</u>

- $\mu(i \leqslant .)(P(.))$: $\begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n & \to & \mathbb{N} \\ (n, \vec{x}) & \mapsto & \begin{cases} \text{le plus petit entier } i \leqslant n \\ \text{tel que } P(\vec{x}) \text{ est vrai} \\ n+1 \text{ s'il n'existe pas} \end{cases} \end{cases}$ [2] d'arité $n+1$

$$\mu(i \leqslant n)(P(\vec{x})) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{k=0}^{i} (1 - P(\vec{x}))$$

- division euclidienne : $\begin{cases} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x,y) & \mapsto & x//y \end{cases}$ d'arité 2

$$\mathsf{div}(a,b) = \mu(i \leqslant a)(a - i * b < 0) - 1$$

1. on a écrit ici $\mathsf{succ}(\mathsf{zero})$ pour $\circ(\mathsf{succ}, \mathsf{zero})$
2. P représente un prédicat primitif, on l'identifie à son indicatrice

- modulo : $\begin{cases} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x,y) & \mapsto & x\ [y] \end{cases}$ d'arité 2

$\mathsf{mod}(a,b) = a - (a//b) * b$

- is_zero : $\begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ d'arité 1

$\mathsf{is\_zero} = \mathsf{rec}(\mathsf{succ}(\mathsf{zero}), \mathsf{zero})$

- egal_k : $\begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ d'arité 1

$\mathsf{egal\_k}(n) = (\mathsf{is\_zero}(\mathsf{diff}(n,k)) + \mathsf{is\_zero}(\mathsf{diff}(k,n)))//2$

- sign : $\begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ d'arité 1

$\mathsf{sign} = \mathsf{rec}(\mathsf{zero}, \mathsf{succ}(\mathsf{zero}))$

- superieur : $\begin{cases} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x > y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ d'arité 2

$\mathsf{superieur}(x,y) = \circ(\mathsf{sign}, \mathsf{diff}(x,y))$

<u>Bijection primitive récursive dont la réciproque l'est aussi :</u>

- φ : $$\begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N}^2 \\ k & \mapsto & (\mathsf{diag}(k) - \mathsf{ecart}(k), \mathsf{ecart}(k)) \end{cases}$$

avec $$\mathsf{diag}(k) = \mu(i \leqslant k+1)(\frac{i(i+1)}{2} > k) - 1$$

$$\mathsf{ecart}(k) = k - \frac{\mathsf{diag}(k)(\mathsf{diag}(k)+1)}{2}$$