Inversion de Pascal et nombre de surjections

Théorème 1 (Formule d'inversion de Pascal)**.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k,$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.$$

Démonstration. On calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} a_j \text{ en intervertissant les deux } \Sigma \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{\cancel{k!}(n-k)!} \frac{\cancel{k!}}{j!(k-j)!} \frac{(n-j)!}{(n-j)!} a_j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} a_j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_j \sum_{l=0}^{n-j} (-1)^{n-l-j} \binom{n-j}{l} \text{ par le changement } l = k-j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_j \underbrace{(1-1)^{n-j}}_{\delta_{n,j}} \\
&= a_n
\end{aligned}$$

□

Corollaire 1. Le nombre de surjections de $\{1, \dots, p\}$ vers $\{1, \dots, n\}$ est

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} p^k.$$

Démonstration. Tout d'abord, on remarque qu'il faut $p \geqslant n$. On note $a_{p,k}$ le nombre de surjections de $\{1, \dots, p\}$ vers $\{1, \dots, k\}$.

Il y a n^p applications de $\{1, \dots, p\}$ vers $\{1, \dots, n\}$. On les dénombre en les partitionnant selon le cardinal de leur image. On note k le cardinal de l'image. Ainsi k varie entre 1 et n. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir k éléments parmi n. On remarque que les applications sont surjectives sur leur image. D'où

$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{p,k}$$

Ainsi, par la formule d'inversion de Pascal, on a

$$a_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$

$\square$