La fonction de répartition F_X caractérise la loi de X

Ce résultat sert dans le développement sur la Formule d'inversion de la fonction caractéristique.

Définition 1 (Tribu)**.** On dit que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω si

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire (*i.e.* si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^{\complement} \in \mathcal{A}$)

(iii) $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable.

Définition 2 (Classe monotone)**.** On dit que $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une classe monotone sur Ω si

(i) $\Omega \in \mathcal{M}$

(ii) Si $A, B \in \mathcal{M}$ et $B \subset A$ alors $A \backslash B \in \mathcal{M}$

(iii) $\mathcal{M}$ est stable par réunion monotone croissante (*i.e.* si $A_i \in \mathcal{M}$, $A_i \subset A_{i+1}$, alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}$)

Théorème 1 (des classes monotones)**.** Soit $\mathcal{E}$ une famille de parties de Ω stable par intersection finie. Alors

$$m(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$$

où $m(\mathcal{E})$ est la classe monotone engendrée par $\mathcal{E}$ [1] et $\sigma(\mathcal{E})$ est la tribu engendrée par $\mathcal{E}$ [2].

Démonstration. On a l'inclusion $m(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$ car $\sigma(\mathcal{E})$ est une classe monotone qui contient $\mathcal{E}$. [3]

En effet,

(i) $\Omega \in \sigma(\mathcal{E})$ car $\sigma(\mathcal{E})$ est une tribu.

(ii) $A \setminus B = A \cap B^{\complement} \in \sigma(\mathcal{E})$.

(iii) stable par union monotone croissante car stable par union dénombrable.

Si $m(\mathcal{E})$ est stable par intersection finie, alors $m(\mathcal{E})$ est une tribu.

En effet,

(i) $\Omega \in m(\mathcal{E})$.

(ii) Si $A \in m(\mathcal{E})$, $A \subset \Omega$, alors $\Omega \setminus A = A^{\complement} \in m(\mathcal{E})$.

(iii) Si $A_i \in m(\mathcal{E})$, alors

$$\bigcup_{j \leqslant i} A_j \in m(\mathcal{E})$$

car c'est une réunion finie que l'on peut obtenir par intersections finies et complémentaires (deux opérations qui laissent stables l'ensemble $m(\mathcal{E})$). On peut alors écrire

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{j \leqslant i} A_j \right)$$

union croissante donc appartient à $m(\mathcal{E})$.

1. la plus petite classe monotone qui contient $\mathcal{E}$
2. la plus petite tribu qui contient $\mathcal{E}$
3. donc la plus petite classe monotone qui contient $\mathcal{E}$, autrement dit $m(\mathcal{E})$, est inclus dans $\sigma(\mathcal{E})$

Il faut maintenant montrer que $m(\mathcal{E})$ est stable par intersection finie.

Montrons que si $A, B \in m(\mathcal{E})$ alors $A \cap B \in (E)$. On pose l'ensemble

$$\mathcal{M}_1 := \{A \in m(\mathcal{E}), \quad \forall B \in \mathcal{E},\, A \cap B \in m(\mathcal{E})\}$$

On a $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}_1$ (par hypothèse du théorème) et $\mathcal{M}_1$ est une classe monotone.

En effet,

(i) $\Omega \in \mathcal{M}_1$ puisque pour tout $B \in \mathcal{E}$, on a $\Omega \cap B \in \mathcal{E} \subset m(\mathcal{E})$.

(ii) Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_1$ avec $A_1 \subset A_2$. Soit $B \in \mathcal{E}$. On a $A_1 \cap B \in m(\mathcal{E})$ et $A_2 \cap B \in m(\mathcal{E})$ par définition de $\mathcal{M}_1$.

$$\begin{aligned}(A_2 \setminus A_1) \cap B &= A_2 \cap A_1^{\complement} \cap B \\ &= (A_2 \cap B) \cap A_1^{\complement} \\ &= \underbrace{(A_2 \cap B)}_{\in m(\mathcal{E})} \setminus \underbrace{(A_1 \cap B)}_{\in m(\mathcal{E})} \in m(\mathcal{E})\end{aligned}$$

Donc $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{M}_1$.

(iii) Soit (A_i) une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}_1$. Soit $B \in \mathcal{E}$. On a $A_i \cap B \in m(\mathcal{E})$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Comme $(A_i \cap B)$ est une suite croissante de $m(\mathcal{E})$, on a

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap B) \in m(\mathcal{E})$$

On a donc $\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \cap B \in m(\mathcal{E})$ et ainsi $\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \in \mathcal{M}_1$.

Ainsi, on a

$$m(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}_1.$$

On pose à présent l'ensemble

$$\mathcal{M}_2 := \{B \in m(\mathcal{E}), \forall C \in m(\mathcal{E}), B \cap C \in m(\mathcal{E})\}$$

L'ensemble $\mathcal{M}_2$ est une classe monotone (quasiment même preuve que pour $\mathcal{M}_1$).

Montrons que $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}_2$.

Soit $B \in \mathcal{E}$, il faut montrer que pour tout $C \in m(\mathcal{E})$, on a $B \cap C \in m(\mathcal{E})$.
Or $C \in m(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}_1$, donc puisque $B \in \mathcal{E}$, on a $C \cap B \in m(\mathcal{E})$ (par définition de $\mathcal{M}_1$).
Ainsi $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}_2$.

Donc $m(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}_2$.
Ainsi $m(\mathcal{E})$ est stable par intersection finie.

Comme $m(\mathcal{E})$ est une tribu et que $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E})$, alors

$$\sigma(\mathcal{E}) \subset m(\mathcal{E}).$$

D'où l'égalité $\sigma(\mathcal{E}) = m(\mathcal{E})$. □

Définition 3 (Probabilité)**.** Une probabilité est une mesure $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ de mesure pleine égale à 1 (*i.e.* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$) telle que

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$ pour $A_i \in \mathcal{A}$ disjoints

Définition 4 (Variable aléatoire)**.** Une variable aléatoire X est une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vers $(E, \mathcal{B})$ et $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$ pour $A \in \mathcal{B}$. De plus, si $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ [4], on dit que X est une variable aléatoire réelle.

Définition 5. On dit que deux variables aléatoires X et Y ont même loi si les mesures $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ sont identiques sur $(E, \mathcal{B})$.

Définition 6 (Fonction de répartition)**.** Soit X une variable aléatoire réelle, on appelle fonction de répartition F_X de X, la fonction suivante

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t)$$

Théorème 2. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles de mesures de probabilités $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ respectivement. Si $F_X = F_Y$ alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ et donc X et Y sont de même loi.

Démonstration. On pose $\Lambda = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}_Y(A)\} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $\mathcal{E}$ l'ensemble des intervalles de la forme $]-\infty, a]$ pour $a \in \mathbb{R}$.

On a alors $\mathcal{E} \subset \Lambda$ puisque $F_X = F_Y$.

Montrons que Λ est une classe monotone sur $\mathbb{R}$.

(i) On a $\mathbb{R} \in \Lambda$ car $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1 = \mathbb{P}(Y \in \mathbb{R})$.

(ii) Soit $A_1, A_2 \in \Lambda$ avec $A_1 \subset A_2$, on a donc $\mathbb{P}(X \in A_1) = \mathbb{P}(Y \in A_1)$ et $\mathbb{P}(X \in A_2) = \mathbb{P}(Y \in A_2)$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in A_2 \backslash A_1) &= \mathbb{P}(X \in A_2) - \mathbb{P}(X \in A_1) \\ &= \mathbb{P}(Y \in A_2) - \mathbb{P}(Y \in A_1) \\ &= \mathbb{P}(Y \in A_2 \backslash A_1)\end{aligned}$$

D'où $A_2 \backslash A_1 \in \Lambda$.

(iii) Soit $(A_i) \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion. On a donc $\mathbb{P}(X \in A_i) = \mathbb{P}(Y \in A_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. On pose $B_i = A_i \backslash A_{i-1}$, de sorte que

$$\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} B_i$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X \in \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(X \in \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \in B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \in A_i) - \mathbb{P}(X \in A_{i-1})\end{aligned}$$

4. désigne les boréliens de $\mathbb{R}$, *i.e.* la plus petite tribu engendrée par les intervalles

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y \in A_i) - \mathbb{P}(Y \in A_{i-1})$$
$$= \mathbb{P}\left(Y \in \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right)$$

Donc $\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i \in \Lambda$.

Donc on a $m(\mathcal{E}) \subset \Lambda$ puisque Λ est une classe monotone. Or $\mathcal{E}$ est stable par intersections finies. Donc par le théorème des classes monotones, on a

$$\sigma(\mathcal{E}) = m(\mathcal{E}).$$

Or par définition des boréliens, on a

$$\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \Lambda$. On peut donc conclure que

$$\Lambda = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Ce qui montre que les variables aléatoires X et Y suivent la même loi. $\square$