3–Coloration d'un graphe

(rédigé par David Xu)

Leçons : 915 ; 925 ; 928

Références : CORMEN–LEISERSON–RIVEST–STEIN, *Introduction à l'algorithmique* (p.1014) [?]

Prérequis :

- la NP-complétude de $\boxed{3\textsc{Sat}}$ $\begin{cases} \underline{\text{entrée :}} \text{ une formule } \varphi \text{ en 3-}\textsc{Cnf} \text{ (calcul propositionnel)} \\ \underline{\text{sortie :}} \text{ oui si } \varphi \text{ est satisfiable, non sinon} \end{cases}$

Introduction :

On va montrer dans ce développement que le problème de 3 coloration d'une graphe est NP-complet. Pour cela, on va réduire le problème 3Sat à 3Col. C'est une des arêtes du graphe en appendice sur les problèmes NP-complets.

Définition 1. On dit qu'une graphe $G = (S, A)$ est 3−coloriable s'il existe une application

$$c : S \to \{1, 2, 3\}$$

telle que, pour tout $(u, v) \in A$, $c(u) \neq c(v)$.

Théorème 1. Le problème de 3−coloration de graphe

$\boxed{3\textsc{Col}}$ $\begin{cases} \underline{\text{entrée :}} \text{ un graphe } G = (S, A) \text{ non orienté} \\ \underline{\text{sortie :}} \text{ oui si } G \text{ est 3−coloriable, non sinon} \end{cases}$

est NP-complet.

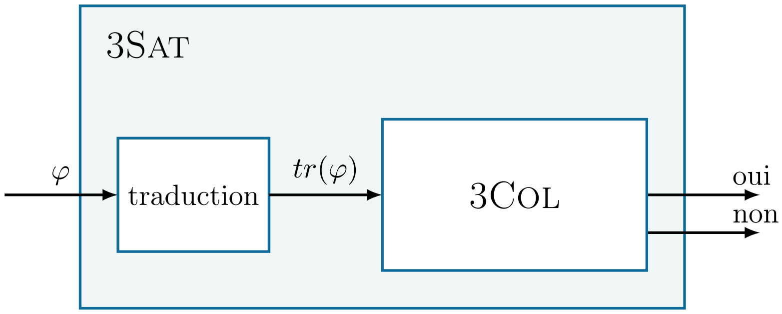
Démonstration.

Étape 1 : 3Col $\in$ *NP*

Ce problème est bien dans NP car on peut vérifier en temps polynomial (en le nombre d'arêtes du graphe) qu'une coloration d'un graphe vérifie bien les propriétés voulues.

Étape 2 : 3Col *est NP-dur*

Pour montrer cela, on va définir une réduction à partir du problème 3Sat qui est NP-dur (et même NP-complet).[1]



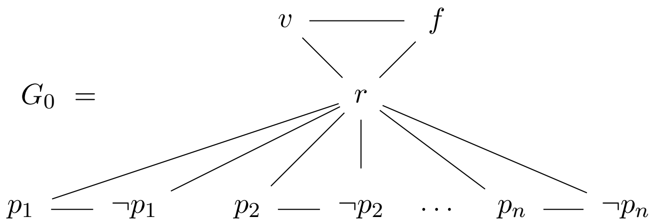
1. On utilise le théorème de Cook et la transformation de Tseitin pour avoir la NP-complétude de CnfSat puis on peut réduire le nombre de littéraux dans chaque clause en ajoutant des nouvelles variables et des nouvelles clauses

Soit donc φ une formule du calcul propositionnel en 3-CNF possédant m clauses,

$$\varphi = \bigwedge_{j=1}^{m} \mathcal{C}_j.$$

Notons $p_1, \ldots, p_n$ les variables propositionnelles qui apparaissent dans φ. On va construire un graphe $tr(\varphi)$ qui repose sur le squelette G_0 suivant :

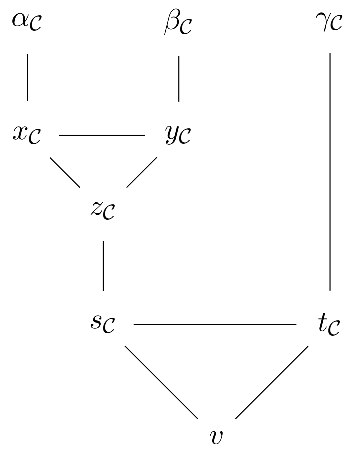
G_0 =



On peut remarquer que dans une coloration de ce graphe, la couleur d'une variable propositionnelle p sera toujours différente de celle de $\neg p$ et qu'un littéral aura toujours la couleur de v ou de f mais pas celle de r.

Puis, pour chaque clause $\mathcal{C} = (\alpha_{\mathcal{C}} \vee \beta_{\mathcal{C}} \vee \gamma_{\mathcal{C}})$ de φ, on va "connecter" le gadget suivant à G_0 pour former le graphe G :

$G_{\mathcal{C}}$ =



Ainsi le graphe $G = tr(\varphi)$ possède $3+2n+5m$ sommets. La réduction $tr(\varphi)$ est donc calculable en temps polynomial en m, le nombre de clauses de ϕ (car $n \leqslant 3m$).
Pour montrer que tr définit bien une réduction de 3SAT à 3COL, nous utiliserons les deux lemmes suivants :

Lemme 1. On peut compléter toute coloration partielle d'un gadget $G_{\mathcal{C}}$ où les sommets $\alpha_{\mathcal{C}}$, $\beta_{\mathcal{C}}$ et $\gamma_{\mathcal{C}}$ sont de la couleur de f ou v et où l'un d'eux est de la couleur de v en une coloration licite de $G_{\mathcal{C}}$.

Démonstration. Il suffit de traiter tous les cas, il y en a $2^3 - 1 = 7$. □

Lemme 2. Dans toute coloration d'un gadget de la forme $G_{\mathcal{C}}$, l'un des sommets $\alpha_{\mathcal{C}}$, $\beta_{\mathcal{C}}$ ou $\gamma_{\mathcal{C}}$ a la couleur de v.

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $\alpha_{\mathcal{C}}$, $\beta_{\mathcal{C}}$ et $\gamma_{\mathcal{C}}$ ont tous la couleur de f (on rappelle qu'ils ont soit la couleur de v, soit celle de f). Comme $\alpha_{\mathcal{C}}$ et $\beta_{\mathcal{C}}$ ont la couleur de f, les sommets

$x_{\mathcal{C}}$ et $y_{\mathcal{C}}$ ont les couleurs de r ou v et leur couleur est différente car ils sont liés par une arête. $z_{\mathcal{C}}$ a donc nécessairement la couleur de f. De même, comme $z_{\mathcal{C}}$ et $\gamma_{\mathcal{C}}$ ont la couleur de f, on en déduit que v a la couleur de f. Contradiction. $\square$

Proposition 1. Pour toute formule φ en 3-CNF, φ est satisfiable si et seulement si $tr(\varphi)$ est $3-$coloriable.

Démonstration. Soit φ une formule en 3-CNF.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit ν une valuation qui satisfait φ, $\nu \models \varphi$. On fixe des couleurs différentes pour les sommets v, f et r de $tr(\varphi)$, $c(v)$, $c(f)$ et $c(r)$, et on colorie les sommets associés aux variables propositionnelles de φ de la façon suivante :
pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $c(p_i) = \begin{cases} c(v) & \text{si } \nu(p_i) = 1 \\ c(f) & \text{sinon} \end{cases}$ et $c(\neg p_i) = \begin{cases} c(v) & \text{si } \nu(p_i) = 0 \\ c(f) & \text{sinon} \end{cases}$.
Comme $\nu \models \varphi = \bigwedge_{j=1}^{m} \mathcal{C}_j$, on a $\forall j \in \{1, \dots, m\}$ $\nu \models \mathcal{C}_j = (\alpha_{\mathcal{C}_j} \vee \beta_{\mathcal{C}_j} \vee \gamma_{\mathcal{C}_j})$, donc dans chacun des gadgets $G_{\mathcal{C}}$, l'un des sommets $\alpha_{\mathcal{C}}$, $\beta_{\mathcal{C}}$ ou $\gamma_{\mathcal{C}}$ est de la couleur de v. Donc d'après le lemme 1, on peut compléter les colorations partielles des $G_{\mathcal{C}}$ en une coloration de $tr(\varphi)$. Donc $tr(\varphi)$ est $3-$coloriable.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit c une $3-$coloration de $tr(\varphi)$. On définit une valuation ν par :
pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\nu(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } c(p_i) = c(v) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
D'après le lemme 2, dans chaque gadget $G_{\mathcal{C}}$, l'un des sommets $\alpha_{\mathcal{C}}$, $\beta_{\mathcal{C}}$ ou $\gamma_{\mathcal{C}}$ a la couleur de v, donc pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ $\nu \models \mathcal{C}_j$, donc $\nu \models \varphi$. La formule φ est satisfiable.
$\square$

Ce qui prouve que 3COL est NP-dur et donc NP-complet. $\square$

Remarques :
On a supposé que les instances de 3SAT sont des formules ayant exactement 3 littéraux par clauses, mais si considère que les clauses ont au plus 3 littéraux, alors on construit les gadgets $G_{\mathcal{C}}$ en mettant des f à la place de $\gamma_{\mathcal{C}}$ si $\mathcal{C} = \alpha_{\mathcal{C}} \vee \beta_{\mathcal{C}}$ ou $\beta_{\mathcal{C}}$ et $\gamma_{\mathcal{C}}$ si $\mathcal{C} = \alpha_{\mathcal{C}}$.

Astuces de l'agrégatif :
Pendant le développement, je ne donnais pas de nom aux sommets intérieurs de $G_{\mathcal{C}}$ et pour prouver le lemme 2, je notais les couleurs des sommets sur le dessin de $G_{\mathcal{C}}$ directement.
Parfois, on parle de coloration propre pour désigner une coloration telle que deux sommets qui sont adjacents sont de couleurs différentes.