Théorème de Scott–Curry

Leçons : 929

Références : HINDLEY, SELDIN, Lambda-Calculus and Combinators (p.65) [?] et LESESVRE–MONTAGNON–LE BARBENCHON–PIERRON, *131 développements pour l'oral* (p. 700) [?]

Prérequis :

- notions de λ-calcul (notamment la β-réduction)
- équivalence entre fonctions μ-récursives et λ-calcul

Notations :

- $[\![n]\!]$ désigne le λ-terme qui représente l'entier n
- les lettres majuscules représentent les λ-termes (sauf pour A et B)
- les lettres grecques représentent les fonctions μ-récursives
- T représente le booléen vrai $T := \lambda xy.x$
- F représente le booléen faux $F := \lambda xy.y$

Introduction :

Le théorème suivant est un théorème qui peut servir à prouver que le problème qui est de savoir si un terme de λ-calcul possède une forme normale est indécidable. Pour cela, on va prouver que des ensembles disjoints ne sont pas séparables par une fonction μ-récursive.

Définition 1 (Récursivement séparable)**.** On dit que deux ensembles $A \subset \mathbb{N}$ et $B \subset \mathbb{N}$ disjoints sont récursivement séparables, s'il existe une fonction μ-récursive φ telle que

$$x \in A \implies \varphi(x) = 0$$

$$x \in B \implies \varphi(x) = 1$$

Définition 2. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ est λ-définissable si et seulement si il existe un terme M de λ-calcul tel que

$$\forall n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N}, \quad M[\![n_1]\!][\![n_2]\!] \ldots [\![n_p]\!] = [\![f(n_1, \ldots, n_p)]\!]$$

On dira que M représente f.

Théorème 1 (Scott–Curry)**.** Aucune paire (A, B) d'ensembles non vides disjoints de λ-termes clos par β-équivalence n'est récursivement séparable.

On veut donc définir "récursivement séparable" pour les λ-termes. Pour cela, on va avoir recours au codage de Gödel $gd(X)$ pour X un λ-terme.

La fonction

$$gd : \Lambda \to \mathbb{N}$$

doit être injective (avec Λ l'ensemble des λ-termes)

Ainsi on peut poser la définition suivante :

Définition 3. On dit que deux ensembles A et B de λ-termes sont récursivement séparables si les ensembles

$$\mathcal{A} = \{gd(X), X \in A\} \text{ et } \mathcal{B} = \{gd(X), X \in B\}$$

sont récursivement séparables.

Démonstration du théorème. Soit A et B deux ensembles non vides de λ-termes clos par β-équivalence.

Par l'absurde, supposons qu'il existe une fonction μ-récursive φ qui sépare les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. On note M le λ-terme qui représente la fonction φ.

On va poser les deux fonctions suivantes :

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (gd(X), gd(Y)) & \mapsto & gd(XY) \end{cases}$$

$$\nu : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & gd(\llbracket n \rrbracket) \end{cases}$$

Ces deux fonctions peuvent être trouvées μ-récursives.[1]

On note G la représentation de γ et N la représentation de ν.

On prend $X \in A$ un λ-terme de A et $Y \in B$ un λ-terme de B.

On pose le λ-terme suivant

$$H := \lambda x.((\mathsf{is\_zero}\ M\ (G\ x\ (N\ x)))\ Y\ X)$$

On notera

$$[Z] := \llbracket gd(Z) \rrbracket$$

On veut montrer une absurdité en cherchant dans quel ensemble (A ou B) le terme $J := H\ [H]$ se trouve

$$\begin{aligned} J &\to_\beta ((\mathsf{is\_zero}\ M\ (G\ [H]\ (N\ [H])))\ Y\ X) \\ &\to_\beta ((\mathsf{is\_zero}\ M\ (G\ [H]\ [[H]]))\ Y\ X) \\ &\to_\beta ((\mathsf{is\_zero}\ M\ [H\ [H]])\ Y\ X) \\ &\to_\beta ((\mathsf{is\_zero}\ M\ [J])\ YX) \\ &\to_\beta ((\mathsf{is\_zero}\ M\ \llbracket gd(J) \rrbracket)\ Y\ X) \end{aligned}$$

On a utilisé les résultats suivants

$$\begin{aligned} N\ [H] &= N\ \llbracket gd(H) \rrbracket \\ &= \llbracket \nu(gd(H)) \rrbracket \\ &= \llbracket gd(\llbracket gd(H) \rrbracket) \rrbracket \\ &= [[H]] \\ G\ [W]\ [Z] &= \llbracket \gamma(gd(W), gd(Z)) \rrbracket \\ &= \llbracket gd(W\ Z) \rrbracket \\ &= [W\ Z] \end{aligned}$$

On peut maintenant faire une disjonction de cas sur la valeur de $\varphi(gd(J))$:

1. je dis "peuvent être" car cela dépend du codage de gd, donc si on numérote les λ-termes par tailles croissantes de termes et en ajoutant des variables différentes au fur et à mesure. Ainsi on peut retrouver pour chaque n le terme correspondant puis la concaténation de deux termes et la représentation des entiers (de Barendregt ou de Church par exemple) sont bien calculables. Donc on a bien des fonctions μ-récursives.

— Si $\varphi(gd(J)) = 0$, alors on a $J \in A$ par définition de φ et on a aussi

$$(\mathsf{is\_zero}\ M\ [\![gd(J)]\!]) \to_\beta T$$

De ce fait,

$$J \to_\beta T\ Y\ X \to_\beta Y \in B$$ [2]

Or B est clos par β-réduction donc $J \in B$ (contradiction avec le fait que $J \in A$)

— Si $\varphi(gd(J)) > 0$, alors on a $J \notin A$ par définition de φ et on a aussi

$$(\mathsf{is\_zero}\ M\ [\![gd(J)]\!]) \to_\beta F$$

De ce fait,

$$J \to_\beta F\ Y\ X \to_\beta X \in A$$ [3]

Or A est clos par β-réduction donc $J \in A$ (contradiction avec le fait que $J \notin A$)

Ainsi on a une contradiction, donc la fonction φ n'existe pas et l'on ne peut pas séparer récursivement les ensembles A et B □

Remarques :

On peut poser A l'ensemble des termes clos qui possèdent une forme normale et B l'ensemble des termes clos qui ne possèdent pas de forme normale. Ces ensembles sont bien disjoints et clos par β-réduction, on peut donc appliquer le théorème de Scott–Curry qui nous dit qu'il n'existe pas de fonction μ-récursive qui sépare ces deux ensembles.

Ainsi le probleme de terminaison (de la β-réduction)

$\boxed{\text{TERMINAISON}}$ $\begin{cases} \underline{\text{entrée :}} \text{ un terme clos } X \text{ de } \lambda\text{-calcul} \\ \underline{\text{sortie :}} \text{ oui si X possède une forme normale, non sinon} \end{cases}$

est indécidable.

Cette preuve finalement ressemble beaucoup à la preuve de l'indécidabilité du problème de l'arrêt pour les machines de Turing, on crée une machine/un λ-terme qui est paradoxal(e).

Astuces de l'agrégatif :

Je mets dans le plan la définition de récursivement séparable (la première en gris), puis au cours du développement, je définis cette notion pour les λ-termes. Quant à la définition de λ-définissable, elle serait aussi dans mon plan avant le théorème d'équivalence avec les fonctions μ-récursives.

Pendant mon développement, je mettais les calculs de N $[H]$ et G $[W]$ $[Z]$ en les intercalant avec la β-réduction de J, je changeais de couleur au tableau pour bien faire comprendre la continuité de la β-réduction de J.

Questions possibles :

- Montrer que l'ensemble des termes clos qui possèdent une forme normale et l'ensemble des termes clos qui ne possèdent pas de forme normale sont tous les deux non vides.
- Où utilise-t-on que A et B sont non vides ?
- Pourquoi l'ensemble A des termes clos qui possèdent une forme normale et l'ensemble B des termes clos qui ne possèdent pas de forme normale sont non vides ?

2. car dès le début on avait pris $X \in A$ et $Y \in B$
3. car dès le début on avait pris $X \in A$ et $Y \in B$