Théorème Central Limite

Leçons : 260 ; 264

Références : QUEFFÉLEC–ZUILY, *Analyse pour l'agrégation* (p.540)

Prérequis :

- la convergence en loi
- le DL de φ_X pour X variable centrée réduite

Introduction :

Le Théorème Central Limite est un théorème de convergence en loi très important en probabilité et en statistique, il permet notamment de montrer des intervalles de confiance. Son plus gros point fort est que ses hypothèses sont très générales, il est valable pour n'importe quelle distribution (discrète ou continue) de variables aléatoires identiquement distribuées indépendantes L^2.

Théorème 1. Soit X_i des variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées (v.a.r.i.i.d.) dans L^2 avec $\mathbb{E}(X_1) = m$ et $\text{Var}(X_1) = \sigma^2$. Alors on a

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i - m}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}oi} Z$$

où Z est une v.a.r. qui suit une loi normale centrée réduite ($\mathcal{N}(0,1)$)

On va utiliser les deux lemmes suivants :

Lemme 1. Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Alors on a

$$\varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Lemme 2. Si la suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge vers un complexe z, alors

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^z$$

Démonstration du théorème. On peut supposer que les variables X_i sont centrées réduites (quitte à prendre $\dfrac{X_i - m}{\sigma}$)

On veut donc prouver que

$$\frac{\sum_i X_i}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}oi} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

On note $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

  Pierre Le Barbenchon

Pour prouver la convergence en loi, il suffit de prouver la convergence simple de la fonction caractéristique. On veut donc prouver que

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

où f est la fonction caractéristique d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Dans un premier temps, étudions $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$.

On a

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \text{ [1]}$$

Or, comme $\varphi_{X_1} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ [2], par la formule de Taylor Young, il existe ε_n qui tend vers 0 quand n tend vers 0 tel que

$$\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \varphi_{X_1}(0) + \frac{t}{\sqrt{n}}\varphi'_{X_1}(0) + \frac{t^2}{2n}\varphi''_{X_1}(0) + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}
&\varphi_{X_1}(0) = \mathbb{E}(e^{i\times 0\times X_1}) = 1\\
&\varphi'_{X_1}(0) = \mathbb{E}(iX_1) = i\mathbb{E}(X_1) = 0 \text{ car la variable est centrée}\\
&\varphi''_{X_1}(0) = \mathbb{E}(-X_1^2) = -\mathrm{Var}(X_1) + \underbrace{\mathbb{E}(X_1)^2}_{=0} = -1 \text{ car la variable est réduite}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

On a utilisé le lemme 2 avec $z_n = -\dfrac{t^2}{2} + \varepsilon_n$ qui tend vers $z = -\dfrac{t^2}{2}$.

Enfin, par le lemme 1, on a $\varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Donc

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}oi} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Ce qui conclut la preuve du théorème. □

Lemme 1. Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Alors on a

$$\varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Démonstration du lemme 1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E}(e^{itZ}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

On pose la fonction

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{zx}e^{-\frac{x^2}{2}}}_{f(z,x)}dx$$

On va montrer que G est holomorphe sur $\mathbb{C}$ en utilisant le théorème d'holomorphie sous l'intégrale sur le disque $D(0,R)$ pour tout $R > 0$.

1. puisque $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \mathbb{E}\left(e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}S_n}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}\sum_k X_k}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X_k}\right) = \prod_k \mathbb{E}\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X_k}\right) = \prod_k \mathbb{E}\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X_1}\right) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$
2. puisque X_1 est dans L^2, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral

- $\forall z \in D(0,R), \quad x \mapsto f(z,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe sur $D(0,R)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in D(0,R), \quad |f(z,x)| \leqslant e^{Rx} e^{-\frac{x^2}{2}}$ intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc $G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Or, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ux} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2}} e^{\frac{u^2}{2}} dx \\ &= e^{\frac{u^2}{2}} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2}} dx = 1$ car c'est l'intégrale de la densité d'une loi normale réduite d'espérance u.

On a alors que $z \mapsto e^{\frac{z^2}{2}}$ et G sont holomorphes et coïncident sur $\mathbb{R}$. Ainsi elles coïncident sur $\mathbb{C}$ par le théorème de prolongement analytique.

On peut alors écrire

$$\varphi_Z(t) = G(it) = e^{\frac{(it)^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Ce qui achève la preuve du lemme 1. □

Lemme 2. Si la suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge vers un complexe z, alors

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^z$$

Démonstration du lemme 2.

$$e^{z_n} - \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} z_n^k$$

où $a_{k,n} = \begin{cases} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\right) & \text{si } k \leqslant n \\ \frac{1}{k!} & \text{sinon} \end{cases}$

On a donc $a_{k,n} \geqslant 0$ pour tout $k, n \in \mathbb{N}$.

D'où

$$\begin{aligned} \left| e^{z_n} - \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \right| &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} |z_n|^k \text{ car } a_{k,n} \geqslant 0 \\ &\leqslant e^{|z_n|} - \left(1 + \frac{|z_n|}{n}\right)^n \\ &\leqslant e^{|z_n|} - \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{|z_n|}{n}\right)\right) \\ &\leqslant e^{|z_n|} - \exp\left(n\left(\frac{|z_n|}{n} - \frac{|z_n|^2}{2n^2}\right)\right) \text{ car } \ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2} \text{ pour } x > 0 \\ &\leqslant e^{|z_n|} - \exp\left(|z_n| - \frac{|z_n|^2}{2n}\right) \end{aligned}$$

$$\leqslant e^{|z_n|}\left(1-\exp\left(-\frac{|z_n|^2}{2n}\right)\right)$$
$$\leqslant e^{|z_n|}\frac{|z_n|^2}{2n} \text{ en utilisant l'inégalité } 1-e^{-x}\leqslant x \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

D'où

$$\left|e^z-\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\right| \leqslant \underbrace{|e^z-e^{z_n}|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0} + \underbrace{e^{|z_n|}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}e^z} \underbrace{\frac{|z_n|^2}{2n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}$$

Ce qui conclut la preuve du lemme 2. □

Remarques :
Historiquement, on a prouvé le théorème de Moivre-Laplace, qui est le théorème central limite pour des variables suivant des lois de Bernoulli.

Astuces de l'agrégatif :
Il faut faire attention à son insertion dans la leçon 264, puisque c'est un théorème qui sort du cadre des seules variables discrètes. Cependant, c'est une généralisation du théorème de Moivre-Laplace, et c'est tellement utilisé même avec des variables aléatoires discrètes que personnellement je trouve qu'il a toute sa place dans cette leçon.

