Banach–Steinhaus

Leçons : 208 ; 246

Références : GOURDON, *Analyse* (p.398)

Prérequis :

- théorème de Baire
- calcul du noyau de Dirichlet
- un Banach est d'intérieur non vide
- $(\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ est complet

Introduction :

Le théorème de Banach–Steinhaus est un théorème essentiel qui permet de déduire des informations globales (normes d'opérateurs) à partir d'informations ponctuelles (normes à x fixé). C'est une application directe du théorème de Baire.

Théorème 1 (Banach–Steinhaus)**.** Soit E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'applications linéaires continues de E vers F. Alors on a deux cas disjoints possibles :

(i) $\sup\{\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)}, i \in I\} < \infty$

(ii) il existe $x \in E$ tel que $\sup\{\|T_i(x)\|_F, i \in I\} = \infty$

Démonstration. S'il existe $x \in E$ tel que $\sup\{\|T_i(x)\|_F, i \in I\} = \infty$, alors il existe une suite $(i_n) \in I^{\mathbb{N}}$ tel que $\|T_{i_n}(x)\|_F$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.
Or $\|T_{i_n}\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup\left\{\dfrac{\|T_{i_n}(y)\|_F}{\|y\|_E}, y \in E\backslash\{0\}\right\} \geqslant \dfrac{\|T_{i_n}(x)\|_F}{\|x\|_E}$ qui tend vers $+\infty$ donc on a bien

$$\sup\{\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)}, i \in I\} = \infty.$$

Ainsi si on est dans le cas (ii), on n'est pas dans le cas (i).

Montrons maintenant que si on n'est pas dans le cas (ii), on est dans le cas (i).
On considère maintenant que, pour tout $x \in E$, $\sup\{\|T_i(x)\|_F, i \in I\} < \infty$.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in I$, on pose l'ensemble

$$F_{n,i} = \{x \in E, \|T_i(x)\|_F \leqslant n\}.$$

$F_{n,i}$ est fermé car $F_{n,i} = T_i^{-1}([0;n])$ avec $[0;n]$ fermé et T_i continue pour tout $i \in I$. On considère

$$F_n = \bigcap_{i\in I} F_{n,i}$$

qui est fermé pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ car l'intersection quelconque de fermés est fermée. De plus, pour tout $x \in E$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sup\{\|T_i(x)\|_F, i \in I\} \leqslant n$, d'où

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n.$$

On utilise le théorème de Baire, E est d'intérieur non vide [1], donc il existe n_0 tel que F_{n_0} soit aussi d'intérieur non vide.

Ainsi il existe un $y \in E$ et $r > 0$ tel que $B(y,r) \subset F_{n_0}$, ce qui se traduit par :

$$\forall z \in B(y,r),\ \|T_i(z)\|_F \leqslant n_0 \text{ pour tout } i \in I.$$

Soit $x \in B(0,1)$, on veut prouver que $\|T_i(x)\|_F$ est borné pour tout $i \in I$. Or on a

$$T_i(x) = \frac{1}{r}(T_i(y+rx) - T(y))$$

car T est linéaire et avec y et $y + rx$ dans $B(y,r)$, donc

$$\|T_i(x)\|_F = \|\frac{1}{r}(T_i(y+rx) - T(y))\| \leqslant \frac{2n_0}{r} \quad \text{pour tout } i \in I.$$

Donc, en passant au sup sur i, on a $\sup\{\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)}, i \in I\} \leqslant \dfrac{2n_0}{r}$. Ainsi

$$\sup\{\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)}, i \in I\} < \infty.$$

□

Application 1. Il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge et donc ne coïncide pas avec leur série de Fourier.

Démonstration. On pose $\mathcal{C}_{2\pi} := \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ avec } f\ 2\pi\text{−périodique }\}$ muni de la norme uniforme $\|.\|$. Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \quad \text{et} \quad S_n(f) : x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{-ikx}.$$

Pour tout $n \in N$, on pose l'application

$$\ell_n : \begin{cases} \mathcal{C}_{2\pi} & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & S_n(f)(0) \end{cases}$$

Étape 1 : *L'application ℓ_n est linéaire et continue pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$, l'application ℓ_n est linéaire par linéarité de la somme et de l'intégrale.

Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$,

$$\begin{aligned} |\ell_n(f)| &= \Big|\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\Big| \\ &= \Big|\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\Big| \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt}dt\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||Dn(t)|dt \\ &\leqslant \|f\|\|D_n\|_1 \end{aligned}$$

1. car E est un espace topologique, il est donc ouvert pour sa topologie et donc égal à son intérieur, de plus, comme c'est un espace vectoriel, il est non vide (il y a 0 dedans). Donc E est bien d'intérieur non vide

On a bien D_n intégrable puisque $D_n(t) = \dfrac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ continue sur $[-\pi;\pi]$ puisque $D_n(0) = 2n+1$ comme vu dans la note [2].

Ainsi on a pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, $|\ell_n(f)| \leqslant \|D_n\|_1 \|f\|$. Donc ℓ_n est continue.

Étape 2 : *Prouvons que* $\|\ell_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_{2\pi},\mathbb{C})} = \|D_n\|_1$

Par le calcul précédent, on sait que $\|\ell_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_{2\pi},\mathbb{C})} \leqslant \|D_n\|_1$. On va approcher $\|\ell_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_{2\pi},\mathbb{C})}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit $f_\varepsilon = \dfrac{D_n(t)}{|D_n(t)| + \varepsilon}$ qui appartient à la boule unité (i.e $f_\varepsilon \in B_\infty(0,1)$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\ell_n(f_\varepsilon)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||Dn(t)|dt \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|Dn(t)|^2}{|Dn(t)|+\varepsilon}dt \end{aligned}$$

Lorsque l'on fait tendre ε vers 0, avec ε positif, cela converge vers $\|D_n\|_1$ par convergence dominée [3]. Ainsi $\|\ell_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_{2\pi},\mathbb{C})} = \|D_n\|_1$.

Étape 3 : $(\|D_n\|_1)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge quand n tend vers l'infini.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|D_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|}dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\left|\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|}dt \geqslant \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\left|\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\right|}{\left|\frac{t}{2}\right|}dt$$

puisque $\sin(x) \leqslant x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En posant le changement de variable $u = \frac{(2n+1)t}{2}$, on a

$$\|D_n\|_1 \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{|\sin u|}{u}du$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin u|}{u}du$ diverge [4], donc $\|D_n\|_1$ diverge aussi.

Étape 4 : *Utilisation du théorème de Banach–Steinhaus*

On veut appliquer le théorème de Banach–Steinhaus avec :

- $E = \mathcal{C}_{2\pi}$ qui est bien un Banach puisque c'est un fermé de $(\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|.\|)$ qui est un Banach.
- $F = \mathbb{C}$ qui est bien un espace vectoriel normé
- $I = \mathbb{N}$
- $T_n = \ell_n$ applications linéaires continues grâce à l'étape 1.

Ainsi on peut appliquer le théorème de Banach–Steinhaus.
Or, par l'étape 3, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\ell_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_{2\pi},\mathbb{C})} = +\infty$, donc on est dans le deuxième cas, il existe $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\ell_n(f)| = \infty$, i.e. il existe $f \in \mathbb{C}_{2\pi}$ telle que $|S_n(f)(0)|$ diverge.

$\square$

2. Utiliser l'équivalent en 0 de sinus : $\dfrac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{(2n+1)\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \underset{x\to 0}{\sim} 2n+1$
3. on a la majoration $\left|\dfrac{|D_n(t)|^2}{|D_n(t)|+\varepsilon}\right| \leqslant |D_n(t)|$ qui est intégrable sur $[-\pi,\pi]$ comme vu précédemment
4. $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{|\sin u|}{u} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin u|}{k\pi}du = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Remarques :

Ce n'est pas évident de trouver dans la pratique un tel f. La série de Fourier de la fonction suivante f diverge (exemple du Gourdon Analyse)

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \quad f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3} + 1)\frac{|x|}{2}\right)$$

Astuces de l'agrégatif :

On n'est pas obligé de découper les étapes de l'application, car cela prend du temps mais cela structure la preuve au moins dans la tête. Pendant le développement, je ne fais pas la divergence de $\|D_n\|_1$, faute de temps. Je dis juste à l'oral que c'est dû à la non intégrabilité du sinus cardinal.

Voici une autre application du théorème de Banach–Steinhaus :

Application 2. Soit E un Banach, F un espace vectoriel normé et une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications linéaires continues de E et F qui converge simplement vers une application T. Alors $\sup\{\|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}, n \in \mathbb{N}\} < \infty$ et T est linéaire continue.