# Cauchy–Lipschitz et lemme de Gronwall

**Leçons : 203 ; 208 ; 220**

**Références : ROUVIÈRE, *Petit Guide du Calcul Différentiel* (p.170)**

**Prérequis :**

- le théorème de point fixe de Picard
- $(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est complet
- le théorème fondamental de l'analyse

**Introduction :**

Le théorème de Cauchy–Lipschitz est un incontournable des équations différentielles ordinaires. En effet, ce théorème assure, sous de bonnes hypothèses, l'existence et l'unicité des solutions d'un problème de Cauchy. C'est un théorème extrêmement général, on n'a pas de tel théorème pour les équations aux dérivées partielles pour lesquelles on est obligé de faire du cas par cas. On montrera ensuite un lemme de Gronwall qui est un outil essentiel en théorie des équations ordinaires comme on le verra par la suite.

**Théorème 1.** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième composante $x$ (de constante $L$). Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution sur $I$ au problème :

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \text{ sur } I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*Démonstration.* Soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. On notera $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

**Étape 1 :** *Montrons le théorème dans le cas $I$ compact*

On pose $\mathcal{E} = \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ muni de la norme

$$\forall x \in \mathcal{E}, \quad \|x\|_{\mathcal{E}} = \sup_{t\in I} e^{-2L|t-t_0|}\|x(t)\|$$

Le but est d'utiliser le théorème de point fixe de Picard sur la fonction

$$\varphi : \begin{cases} (\mathcal{E}, \|.\|_{\mathcal{E}}) & \to & (\mathcal{E}, \|.\|_{\mathcal{E}}) \\ x & \mapsto & x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds \end{cases}$$

Il faut donc vérifier que $(\mathcal{E}, \|.\|_{\mathcal{E}})$ est un espace de Banach. On a $(\mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n), \|.\|_\infty)$ qui est complet et $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_{\mathcal{E}}$ qui sont équivalentes[1] donc $(\mathcal{E}, \|.\|_{\mathcal{E}})$ est bien complet.

Montrons que $\varphi$ est contractante. Soit $x, y \in \mathcal{E}$, soit $t \geqslant t_0$,

1. On utilise le caractère compact de $I$. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, pour tout $t \in I$,

$$e^{-2L|I|}\|x(t)\| \leqslant e^{-2L|t-t_0|}\|x(t)\| \leqslant \|x(t)\|$$

d'où

$$e^{-2L|I|}\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_{\mathcal{E}} \leqslant \|x\|_\infty$$

en passant au sup

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x)(t)-\varphi(y)(t)\| &\leqslant \left\| \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))-f(s,y(s))ds \right\| \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} \|f(s,x(s))-f(s,y(s))\|ds \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} L\|x(s)-y(s)\|ds \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} Le^{2L(s-t_0)}e^{-2L(s-t_0)}\|x(s)-y(s)\|ds \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} Le^{2L(s-t_0)}\|x-y\|_{\mathcal{E}}ds \\
&\leqslant \|x-y\|_{\mathcal{E}} L \left[\frac{e^{2L(s-t_0)}}{2L}\right]_{t_0}^{t} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|x-y\|_{\mathcal{E}}(e^{2L(t-t_0)}-1) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|x-y\|_{\mathcal{E}}e^{2L(t-t_0)}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$e^{-2L(t-t_0)}\|\varphi(x)(t)-\varphi(y)(t)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x-y\|_{\mathcal{E}}$$

On peut faire de même pour $t \leqslant t_0$.

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x)(t)-\varphi(y)(t)\| &\leqslant \left\| \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))-f(s,y(s))ds \right\| \\
&\leqslant \int_{t}^{t_0} \|f(s,x(s))-f(s,y(s))\|ds \\
&\leqslant \int_{t}^{t_0} L\|x(s)-y(s)\|ds \\
&\leqslant \int_{t}^{t_0} Le^{2L(t_0-s)}e^{-2L(t_0-s)}\|x(s)-y(s)\|ds \\
&\leqslant \int_{t}^{t_0} Le^{2L(t_0-s)}\|x-y\|_{\mathcal{E}}ds \\
&\leqslant \|x-y\|_{\mathcal{E}} L \left[\frac{e^{2L(t_0-s)}}{2L}\right]_{t}^{t_0} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|x-y\|_{\mathcal{E}}(e^{2L(t_0-t)}-1) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|x-y\|_{\mathcal{E}}e^{2L(t_0-t)}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$e^{-2L(t_0-t)}\|\varphi(x)(t)-\varphi(y)(t)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x-y\|_{\mathcal{E}}$$

En passant au sup sur $t \in I$, on obtient

$$\|\varphi(x)-\varphi(y)\|_{\mathcal{E}} \leqslant \frac{1}{2}\|x-y\|_{\mathcal{E}}$$

Donc $\varphi$ est contractante, on peut appliquer le théorème de point fixe de Picard.

Il existe donc un unique point fixe $\tilde{x}$ de $\varphi$. On a donc

$$\tilde{x}(t)-x_0 = \int_{t_0}^{t} f(s,\tilde{x}(s))ds$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} \tilde{x}' = f(t, \tilde{x}) \text{ sur } I \\ \tilde{x}(t_0) = x_0 \end{cases}$$

**Étape 2 :** *Montrons le théorème dans le cas général*

On peut écrire

$$I = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$$

où $I_k = I \cap [-k; k]$.

Tous les $I_k$, sont compacts, donc on peut appliquer l'étape 1, on obtient des solutions $x_k$ définies sur $I_k$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1|_{I_k}} = x_k$ par unicité. Donc l'application

$$x : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & x_k(t) \quad \text{si } t \text{ est dans } I_k \end{cases}$$

est bien définie, de manière unique et est solution du problème.

Cela conclut donc la preuve du théorème. □

**Théorème 2.** Dans le même cadre, soient $x$ et $y$ deux solutions, on a alors :

$$\forall t \in I, \quad \|x(t) - y(t)\| \leqslant \|x(t_0) - y(t_0)\| e^{L|t-t_0|}$$

*Démonstration.* On pose $\psi(t) = \|x(t) - y(t)\|$. Pour tout $t \geqslant t_0$, on a

$$\psi(t) \leqslant \psi(t_0) + \int_{t_0}^{t} L\psi(s) ds$$

par la formule de $\varphi$ dans la preuve précédente.

La fonction $\psi$ n'est pas dérivable, donc on va poser $\phi(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \psi(s) ds$ et utiliser la dérivée de $\phi$. On a

$$\phi'(t) \leqslant \psi(t_0) + L\phi(t)$$

On observe que

$$\frac{d}{dt}[\phi(t)e^{-L(t-t_0)}] = (\phi'(t) - L\phi(t))e^{-L(t-t_0)} \leqslant \psi(t_0)e^{-L(t-t_0)}$$

On intègre (bornes croissantes) entre $t_0$ et $t$ pour trouver

$$\begin{aligned} \phi(t)e^{-L(t-t_0)} &\leqslant \psi(t_0) \int_{t_0}^{t} e^{-L(s-t_0)} ds \\ &\leqslant \psi(t_0) \left[ \frac{e^{-L(s-t_0)}}{-L} \right]_{t_0}^{t} \\ &\leqslant \psi(t_0) \frac{(1 - e^{-L(t-t_0)})}{L} \end{aligned}$$

D'où

$$\phi(t) \leqslant \psi(t_0) \frac{e^{L(t-t_0)} - 1}{L}$$

Ainsi en réinjectant dans $\phi'(t) \leqslant \psi(t_0) + L\phi(t)$, on trouve

$$\psi(t) \leqslant \psi(t_0) + L\psi(t_0)\frac{e^{L(t-t_0)} - 1}{L} = \psi(t_0)e^{L(t-t_0)}$$

On peut faire de même pour $t \leqslant t_0$, ce qui permet de conclure la preuve du théorème.

Pour tout $t \leqslant t_0$, on a

$$\psi(t) \leqslant \psi(t_0) + \int_t^{t_0} L\psi(s)ds$$

par la formule de $\varphi$ dans la preuve précédente.

La fonction $\psi$ n'est pas dérivable, donc on va poser $\phi(t) = \displaystyle\int_t^{t_0} \psi(s)ds$ et utiliser la dérivée de $\phi$. On a

$$\phi'(t) = -\psi(t) \geqslant -\psi(t_0) - L\phi(t)$$

En dérivant, on a

$$\frac{d}{dt}[\phi(t)e^{Lt}] = (\phi'(t) + L\phi(t))e^{Lt} \geqslant -\psi(t_0)e^{Lt}$$

On intègre (bornes croissantes) entre $t$ et $t_0$ pour trouver

$$\begin{aligned} -\phi(t)e^{Lt} &\geqslant -\psi(t_0)\int_t^{t_0} e^{Ls}ds \\ \phi(t)e^{Lt} &\leqslant \psi(t_0)\left[\frac{e^{Ls}}{L}\right]_t^{t_0} \\ &\leqslant \psi(t_0)\frac{(e^{Lt_0} - e^{Lt})}{L} \end{aligned}$$

D'où

$$\phi(t) \leqslant \psi(t_0)\frac{e^{L(t_0-t)} - 1}{L}$$

Ainsi en réinjectant dans $\psi(t) \leqslant \psi(t_0) + L\phi(t)$, on trouve

$$\psi(t) \leqslant \psi(t_0) + L\psi(t_0)\frac{e^{L(t_0-t)} - 1}{L} = \psi(t_0)e^{L(t_0-t)}$$

$\square$

**Remarques :**

Il faut bien faire attention aux cas $t \leqslant t_0$. Ne pas oublier de préciser que les cas $t \leqslant t_0$ se traitent de manière similaire pendant le développement.

Selon le temps, on n'est pas obligé de faire le lemme de Gronwall