Réciproques partielles du théorème de Césaro

Leçons : 223 ; 230

Références : FRANCINOU–GIANELLA–NICOLAS, *Oraux X-ENS Analyse 1* (p.68)

Prérequis :

- le théorème de Césaro
- la comparaison série/intégrale

Astuces de l'agrégatif :
J'ai fait deux versions de ce développement que je mets à la suite, une première qui est orientée "suites" et une deuxième orientée "séries".

Introduction :

Le théorème de Césaro est un théorème nous donnant la convergence de la suite des moyennes pour une suite convergente. La réciproque est fausse : si la suite des moyennes converge, la suite initiale ne converge pas forcément (par exemple, $u_n = (-1)^n$ est un terme de suite qui ne converge pas alors que la suite des moyennes converge vers 0). Ainsi on voudrait renforcer les hypothèses que l'on fait sur la suite u_n pour avoir une réciproque au théorème de Césaro.

Théorème 1 (Réciproque partielle de Césaro)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathbb{K}$ telle que la suite $\left(\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$.

(i) Si (u_n) est réelle monotone, alors (u_n) converge vers ℓ.

(ii) Si $u_n - u_{n-1} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (*i.e.* il existe $C \geqslant 0$ telle que $|u_n - u_{n-1}| \leqslant \frac{C}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ [1]), alors (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration.

(i) Pour (u_n) réelle monotone, on veut prouver l'équivalence :

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \iff (\sigma_n) \text{ converge vers } \ell$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Cela vient du théorème de Césaro.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, on raisonne par contraposée. Si (u_n) ne converge pas, alors (u_n) tend vers l'infini car (u_n) est supposée monotone. Quitte à prendre $(-u_n)$, on considère que (u_n) est croissante vers $+\infty$.

On va prouver que le théorème de Césaro peut être appliqué pour une limite infinie.
Pour tout $A \geqslant 0$, il existe un rang n_0 telle que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant A$. On pose la suite (v_n) définie par $v_n = \min(u_n, A)$. On a l'inégalité $v_n \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De ce fait, on a aussi

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

1. Dans la définition classique, c'est qu'il existe une constante à partir d'un certain rang n_0, donc quitte à augmenter cette constante, on peut avoir l'inégalité pour les n_0 termes et donc on a une constante pour tout $n \in \mathbb{N}$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Or la suite (v_n) converge vers A, donc $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k\right)$ converge aussi vers A (par le théorème de Césaro).

Donc on a
$$A = \liminf \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k\right) \leqslant \liminf \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right) = \liminf \sigma_n$$

Ainsi la suite (σ_n) diverge aussi vers $+\infty$.

Donc (u_n) et (σ_n) convergent. Par le théorème de Césaro, (u_n) et (σ_n) possèdent la même limite.

(ii) On suppose que (σ_n) converge vers une limite ℓ. L'idée va être de prouver que la moyenne des termes entre n et nx avec $x > 1$ converge aussi vers ℓ et ensuite de rapprocher x de 1 pour n'avoir que le terme u_n dans la moyenne, ce qui prouvera que la suite (u_n) converge aussi vers ℓ.

On pose, pour tout $t \geqslant 1$,
$$\sigma_t := \frac{1}{t}\sum_{1\leqslant k\leqslant t} u_k = \frac{E(t)}{t}\sigma_{E(t)}$$

où $E(t)$ est la partie entière de t. De plus, $\sigma_{E(t)}$ tend vers ℓ quand t tend vers $+\infty$, et $\frac{E(t)}{t}$ tend vers 1 quand t tend vers $+\infty$. Donc σ_t tend vers ℓ quand t tend vers $+\infty$.

Pour $x > 1$, on pose
$$M_n(x) = \frac{1}{E(nx-n)}\sum_{n<k\leqslant nx} u_k = \frac{nx\sigma_{nx} - n\sigma_n}{E(n(x-1))} = \frac{n(x-1)}{E(n(x-1))}\frac{(x\sigma_{nx} - \sigma_n)}{(x-1)}.$$

Or $\frac{n(x-1)}{E(n(x-1))}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et σ_{nx} et σ_n tendent vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ par ce qui précède. Donc $M_n(x)$ tend vers $\frac{x\ell - \ell}{x-1} = \ell$ quand n tend vers $+\infty$.

On veut maintenant comparer le terme u_n avec $M_n(x)$.
Or on peut écrire
$$u_n = \frac{1}{E(nx-n)}\sum_{n<k\leqslant nx} u_n.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$|M_n(x) - u_n| = \left|\frac{1}{E(n(x-1))}\sum_{n<k\leqslant nx}(u_k - u_n)\right| \leqslant \frac{1}{E(n(x-1))}\sum_{n<k\leqslant nx}|u_k - u_n|$$

On va vouloir majorer $u_k - u_n$, on va utiliser l'hypothèse qui nous donne un $C \geqslant 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ on ait $|u_j - u_{j-1}| \leqslant \frac{C}{j}$.
Pour tout $k > n$, on a
$$\begin{aligned}|u_k - u_n| = \left|\sum_{j=n+1}^{k}(u_j - u_{j-1})\right| &\leqslant \sum_{j=n+1}^{k}|u_j - u_{j-1}| \leqslant \sum_{j=n+1}^{k}\frac{C}{j}\\ &\leqslant \sum_{j=n+1}^{k}\int_{j-1}^{j}\frac{C}{t}dt \leqslant C\int_{n}^{k}\frac{1}{t}dt = C\ln\left(\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

(par comparaison avec l'intégrale de $\frac{1}{t}$).

On reprend la majoration précédente,

$$\begin{aligned}|M_n(x)-u_n| &\leqslant \frac{1}{E(n(x-1))}\sum_{n<k\leqslant nx}|u_k-u_n| \\ &\leqslant \frac{1}{E(n(x-1))}\sum_{n<k\leqslant nx} C\ln\left(\frac{k}{n}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{E(n(x-1))}\sum_{n<k\leqslant nx} C\ln\left(\frac{nx}{n}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{E(n(x-1))}\sum_{n<k\leqslant nx} C\ln(x) \\ &\leqslant C\ln(x).\end{aligned}$$

On obtient une majoration indépendante de n.

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $x_0 > 1$ tel que $C\ln(x_0) < \varepsilon$. De plus, on a montré que $M_n(x)$ converge vers ℓ pour tout $x > 1$, donc il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait

$$|M_n(x_0)-\ell| < \varepsilon.$$

Ainsi pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|u_n - l| \leqslant |u_n - M_n(x_0)| + |M_n(x_0)-\ell| \leqslant C\ln(x_0)+\varepsilon < 2\varepsilon.$$

Donc la suite (u_n) converge vers ℓ. □

Astuces de l'agrégatif :

Pour le (i), je ne fais pas les deux implications, j'explique juste l'implication qui nous intéresse.

Pour la leçon 230, je fais apparaître des séries pour étudier une vraie somme (c'est la version qui colle le plus à la référence d'ailleurs)

Introduction :

Le théorème de Césaro est un théorème nous donnant la convergence de la suite des moyennes pour une suite convergente. La réciproque est fausse : si la suite des moyennes converge, la suite initiale ne converge pas forcément (par exemple, $u_n = (-1)^n$ est un terme de suite qui ne converge pas alors que la suite des moyennes converge vers 0). Ainsi on voudrait renforcer les hypothèses que l'on fait sur la suite u_n pour avoir une réciproque au théorème de Césaro.

Théorème 1 (Réciproque partielle de Césaro)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathbb{K}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$ et $\sigma_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k$.

(i) Si (u_n) est réelle et positive, alors

$$(S_n) \text{ converge vers } \ell \iff (\sigma_n) \text{ converge vers } \ell.$$

(ii) Si $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ($i.e.$ il existe $C \geqslant 0$ telle que $|u_n| \leqslant \frac{C}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ [1]), alors

$$(S_n) \text{ converge vers } \ell \iff (\sigma_n) \text{ converge vers } \ell.$$

Démonstration.

(i) Pour (u_n) réelle positive, on veut prouver l'équivalence :

$$(S_n) \text{ converge vers } \ell \quad \iff \quad (\sigma_n) \text{ converge vers } \ell$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Cela vient du théorème de Césaro.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On raisonne par contraposée. Comme (u_n) est positive, alors (S_n) est croissante. Ainsi si (S_n) ne converge pas, alors (S_n) tend vers l'infini. On suppose que donc que (S_n) diverge vers $+\infty$.

On va prouver que le théorème de Césaro peut être appliqué pour une limite infinie. Pour tout $A \geqslant 0$, il existe un rang n_0 telle que pour tout $n \geqslant n_0$, $S_n \geqslant A$. On pose la suite (T_n) définie par $T_n = \min(S_n, A)$. On a l'inégalité $T_n \leqslant S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De ce fait, on a aussi

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Or la suite (T_n) converge vers A, donc $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k\right)$ converge aussi vers A (par le théorème de Césaro).

Donc on a

$$A = \liminf \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k\right) \leqslant \liminf \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k\right) = \liminf \sigma_n$$

Ainsi la suite (σ_n) diverge aussi vers $+\infty$.

Donc (S_n) et (σ_n) convergent. Par le théorème de Césaro, (S_n) et (σ_n) possèdent la même limite.

(ii) On va montrer l'équivalence voulue

$$(S_n) \text{ converge vers } \ell \quad \iff \quad (\sigma_n) \text{ converge vers } \ell$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Cela vient du théorème de Césaro.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, on suppose que (σ_n) converge vers une limite ℓ. L'idée va être de prouver que la moyenne des termes S_k entre n et nx avec $x > 1$ converge aussi vers ℓ et ensuite de rapprocher x de 1 pour n'avoir que le terme S_n dans la moyenne, ce qui va nous prouver que la suite (S_n) converge aussi vers ℓ.

On pose, pour tout $t \geqslant 1$,

$$\sigma_t =: \frac{1}{t}\sum_{1 \leqslant k \leqslant t} S_k = \frac{E(t)}{t}\sigma_{E(t)}$$

où $E(t)$ est la partie entière de t. De plus, $\sigma_{E(t)}$ tend vers ℓ quand t tend vers $+\infty$, et $\frac{E(t)}{t}$ tend vers 1 quand t tend vers $+\infty$. Donc σ_t tend vers ℓ quand t tend vers $+\infty$.

Pour $x > 1$, on pose

$$M_n(x) = \frac{1}{E(nx-n)}\sum_{n<k\leqslant nx} u_k = \frac{nx\sigma_{nx} - n\sigma_n}{E(n(x-1))} = \frac{n(x-1)}{E(n(x-1))}\frac{(x\sigma_{nx} - \sigma_n)}{(x-1)}.$$

1. Dans la définition classique, c'est qu'il existe une constante à partir d'un certain rang n_0, donc quitte à augmenter cette constante, on peut avoir l'inégalité pour les n_0 termes et donc on a une constante pour tout $n \in \mathbb{N}$

Or $\dfrac{n(x-1)}{E(n(x-1))}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et σ_{nx} et σ_n tendent vers l quand n tend vers $+\infty$ par ce qui précède. Donc $M_n(x)$ tend vers $\dfrac{x\ell-\ell}{x-1}=\ell$ quand n tend vers $+\infty$.

On veut maintenant comparer le terme S_n avec $M_n(x)$.
Or on peut écrire

$$S_n = \frac{1}{E(nx-n)} \sum_{n<k\leqslant nx} S_n.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|M_n(x) - S_n| = |\frac{1}{E(n(x-1))} \sum_{n<k\leqslant nx} (S_k - S_n)| \leqslant \frac{1}{E(n(x-1))} \sum_{n<k\leqslant nx} |S_k - S_n|$$

On va vouloir majorer $S_k - S_n$, on va utiliser l'hypothèse qui nous donne un $C \geqslant 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ on ait $|u_j| \leqslant \frac{C}{j}$.
Pour tout $k > n$, on a

$$\begin{aligned}
|S_k - S_n| = \left| \sum_{j=n+1}^{k} u_j \right| &\leqslant \sum_{j=n+1}^{k} |u_j| \leqslant \sum_{j=n+1}^{k} \frac{C}{j} \\
&\leqslant \sum_{j=n+1}^{k} \int_{j-1}^{j} \frac{C}{t} dt \leqslant C \int_n^k \frac{1}{t} dt = C \ln\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

(par comparaison avec l'intégrale de $\frac{1}{t}$).

On reprend la majoration précédente,

$$\begin{aligned}
|M_n(x) - S_n| &\leqslant \frac{1}{E(n(x-1))} \sum_{n<k\leqslant nx} |S_k - S_n| \\
&\leqslant \frac{1}{E(n(x-1))} \sum_{n<k\leqslant nx} C \ln\left(\frac{k}{n}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{E(n(x-1))} \sum_{n<k\leqslant nx} C \ln\left(\frac{nx}{n}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{E(n(x-1))} \sum_{n<k\leqslant nx} C \ln(x) \\
&\leqslant C \ln(x).
\end{aligned}$$

On obtient une majoration indépendante de n.

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $x_0 > 1$ tel que $C\ln(x_0) < \varepsilon$. De plus, on a montré que $M_n(x)$ converge vers ℓ pour tout $x > 1$, donc il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait

$$|M_n(x_0) - \ell| < \varepsilon.$$

Ainsi pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\underline{|S_n - l| \leqslant} |S_n - M_n(x_0)| + |M_n(x_0) - \ell| \leqslant C\ln(x_0) + \varepsilon < \underline{2\varepsilon}.$$

Donc la suite (S_n) converge vers ℓ. □

Astuces de l'agrégatif :
Pour le (i), je ne fais pas les deux implications, j'explique juste l'implication qui nous intéresse.