Convergence de polygones vers l'isobarycentre

Leçons : 152 ; 182 ; 226

Références : GOURDON, *Algèbre* (p.146)

Prérequis :

- calcul du déterminant de Van Der Monde
- propriété d'associativité des barycentres

Introduction :

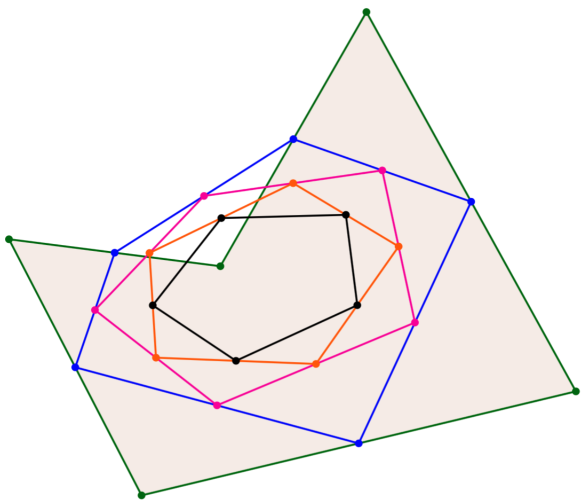
On souhaite observer vers quelle limite tend une suite de polygones définie en prenant le polygone qui relie les milieux de chaque coté du polygone précédent. On tend en fait vers un point qui est l'isobarycentre du premier polygone.

Théorème 1. Soit $z^{(0)} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. On considère la suite $(z^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$z^{(k+1)} = \left(\frac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2}, \frac{z_2^{(k)} + z_3^{(k)}}{2}, \dots, \frac{z_{n-1}^{(k)} + z_n^{(k)}}{2}, \frac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2} \right)$$

Alors la suite $(z^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre de $z^{(0)}$, i.e. $(z^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $(g, g, \dots, g)$ quand k tend vers l'infini où g est l'isobarycentre de $z^{(0)}$.

Illustration 1.



Convergence des polygones ($z^{(0)}$: vert, $z^{(1)}$: bleu, $z^{(2)}$: rose, $z^{(3)}$: orange, $z^{(4)}$: noir)

Lemme 1. Soit $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & & & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & & a_n & a_0 \end{pmatrix}$ une matrice circulante. On note $P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$ le polynôme associé à A et $\omega = e^{i2\pi/n}$ une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Alors

$$\det(A) = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$$

Démonstration du lemme.
On pose la matrice suivante

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & (\omega^2)^2 & \dots & (\omega^{n-1})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & (\omega^2)^{n-1} & \dots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$$

Comme tous les $(\omega^j)_{j=1}^{n-1}$ sont distincts, on a $\det \Omega \neq 0$.
En calculant $A\Omega$, on obtient

$$A\Omega = \begin{pmatrix} P(1) & P(\omega) & P(\omega^2) & \dots & P(\omega^{n-1}) \\ P(1) & \omega P(\omega) & \omega^2 P(\omega^2) & \dots & \omega^{n-1} P(\omega^{n-1}) \\ P(1) & \omega^2 P(\omega) & (\omega^2)^2 P(\omega^2) & \dots & (\omega^{n-1})^2 P(\omega^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(1) & \omega^{n-1} P(\omega) & (\omega^2)^{n-1} P(\omega^2) & \dots & (\omega^{n-1})^{n-1} P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$$

En calculant le déterminant et en factorisant chaque colonne par les $P(\omega^j)$, on obtient donc

$$\det A\Omega = \det A \det \Omega = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j) \det \Omega$$

Ainsi

$$\det A = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$$

□

Démonstration du théorème. On a $z^{(k+1)} = Az^{(k)}$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Par récurrence, on a $z^{(k)} = A^k z^{(0)}$. On veut donc étudier la limite de A^k. Pour cela, on va essayer de diagonaliser A.

$$\chi_A(X) = \det(XI_d - A) = \begin{vmatrix} X-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & X-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & X-\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Par le lemme précédent, avec le polynome $P(t) = X - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$, on a

$$\chi_A(X) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(X - \left(\frac{1+\omega^j}{2} \right) \right)$$

Donc A est diagonalisable, puisque χ_A est scindé à racines simples.

$$A = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1+\omega}{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1+\omega^{n-1}}{2} \end{pmatrix} Q$$

Or $\left| \dfrac{1+\omega^j}{2} \right| < 1$ pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$.[1]

Ainsi $A^k = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \left(\frac{1+\omega}{2}\right)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \left(\frac{1+\omega^{n-1}}{2}\right)^k \end{pmatrix} Q \xrightarrow[k\to+\infty]{} Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} Q$

On pose $A^{(\infty)} = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} Q$

Ainsi on obtient l'existence de la limite des $(z^{(k)})_k$, on a $\lim\limits_{k\to\infty} z^{(k)} = A^{(\infty)} z^{(0)}$. On note cette limite $z^{(\infty)}$.

Or, comme on a $z^{(k+1)} = Az^{(k)}$, en passant à la limite, on trouve $z^{(\infty)} = Az^{(\infty)}$.

Donc $z^{(\infty)} \in \operatorname{Ker}(A - I_n)$ qui est de dimension 1[2]. Or $(1, \dots, 1) \in \operatorname{Ker}(A - I_n)$ donc $z^{(\infty)} = \lambda(1, \dots, 1)$.

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les $z^{(k)}$ ont même barycentre (on utilise la propriété d'associativité des barycentres). En passant à la limite, $z^{(\infty)}$ a le même barycentre que tous les $z^{(k)}$ que l'on notera g.

$$g = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} z_j^{(\infty)} = \frac{n\lambda}{n} = \lambda$$

Ainsi $z^{(\infty)} = (g, \dots, g)$. $\square$

1. On peut le voir sur un dessin pour se convaincre, on peut faire un calcul avec l'angle moitié pour être rigoureux et le prouver par un calcul

$$\left| \frac{1+e^{\frac{i2\pi j}{n}}}{2} \right| = \left| e^{\frac{i\pi j}{n}} \frac{e^{-\frac{i\pi j}{n}} + e^{\frac{i\pi j}{n}}}{2} \right| = \left| e^{\frac{i\pi j}{n}} \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right) \right| < 1$$

grâce au cosinus

2. puisque $\chi_A = \prod_{j=0}^{n-1} \left(X - \left(\frac{1+\omega^j}{2} \right) \right)$

Remarques :

Le résultat reste vrai si on ne prend pas le milieu mais un autre rapport sur le segment.

Astuces de l'agrégatif :

Attention aux indices, on a n pour la dimension des vecteurs, k pour l'indice de suite, j pour les différentes sommations, le i complexe[3], etc.