Décomposition de Dunford

Leçons : 153 ; 157

Références : GOURDON, *Algèbre* (p.194) [?]

Prérequis :

- le lemme des noyaux
- la définition d'un projecteur [1]
- le théorème de Bézout avec plusieurs polynômes
- le théorème de codiagonalisabilité
- la diagonalisabilité d'un projecteur [2]

Introduction :

La décomposition de Dunford permet de mieux comprendre l'endomorphisme que l'on étudie et est plus poussée qu'une simple trigonalisation. Elle permet de calculer l'exponentielle facilement grâce au binome de Newton et la commutativité des endomorphismes d et n.

Théorème 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que

- d est diagonalisable
- n est nilpotent
- $u = d + n$
- d et n commutent

De plus, d et n sont des polynômes en u.

Lemme 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et P annulateur de u :

$$P = \alpha \prod_{i=1}^{r} M_i^{\alpha_i} \text{ (décomposition en irréductibles)}$$ [3]

Notons pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, $N_i = \ker M_i^{\alpha_i}(u)$.

Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$ et pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus\limits_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en u.

Démonstration du lemme. Par le lemme des noyaux, on a

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$$

1. endomorphisme p tel que $p \circ p = p$
2. car $X(X-1)$ est scindé à racines simples et annule p le projecteur
3. α est un inversible

Notons $Q_i = \prod_{j \neq i} M_j^{\alpha_j}$, on remarque que les (Q_i) sont premiers entre eux dans leur ensemble. Donc le théorème de Bézout nous donne des polynômes $(U_i) \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$\sum_{i=1}^{r} Q_i U_i = 1$$

Notons $P_i = Q_i U_i$ et $p_i = P_i(u)$.

Étape 1 : *Montrons que p_i est un projecteur.*

On a, par la relation de Bézout que l'on a ci-dessus,

$$\sum_{j=1}^{r} p_j = Id.$$

Donc, pour tout $i \in [\![1; r]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{r} p_j \circ p_i = p_i$$

Or pour tout $j \neq i$, on a $p_j \circ p_i = U_i U_j(u) \circ \underbrace{Q_i Q_j(u)}_{=0} = 0$ car $P \mid Q_i Q_j$ et $P(u) = 0$.

On trouve donc

$$p_i^2 = p_i$$

Étape 2 : *Montrons que $Im(p_i) = N_i$.*

Par double inclusion,

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mathrm{Im}(p_i)$. Alors il existe y tel que $x = p_i(y)$. On veut montrer que $x \in N_i$, *i.e.* $M_i^{\alpha_i}(u)(x) = 0$.

$$\begin{aligned} M_i^{\alpha_i}(u)(x) &= M_i^{\alpha_i}(u)(p_i(y)) \\ &= M_i^{\alpha_i} Q_i U_i(u)(y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $P \mid M_i^{\alpha_i} Q_i$. Donc $x \in N_i$.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in N_i$. On a alors $M_i^{\alpha_i}(u)(x) = 0$. Or, par la relation de Bézout, on a

$$x = \sum_{j=1}^{r} p_j(x) = p_i(x)$$

car pour tout $j \neq i$, on a $p_j = Q_j U_j(u)$ et $Q_j = \prod_{k \neq j} M_k^{\alpha_k}$.

D'où $x \in \mathrm{Im}(p_i)$.

Étape 3 : *Montrons que* $\ker(p_i) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$

Par double inclusion,

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \ker(p_i)$. On a

$$x = \sum_{j=1}^{r} p_j(x) = \sum_{j \neq i} p_j(x) \in \bigoplus_{j \neq i} \mathrm{Im}(p_j) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$$

$\boxed{\supset}$ Pour tout $j \neq i$, $N_j \subset \ker(p_i)$ car

$$M_j^{\alpha_j} \mid Q_j \mid P_i$$

Ainsi, on a

$$\bigoplus_{j\neq i} N_j \subset \ker(p_i)$$

Donc p_i est le projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus\limits_{j\neq i} N_j$. De plus, $p_i = P_i(u)$ qui est donc bien un polynôme en u. □

Démonstration du théorème.
Existence : Le polynôme $\chi_u = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ est scindé. On peut donc appliquer le lemme à χ_u. Avec les mêmes notations que dans le lemme, on pose

$$d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i \in \mathbb{K}[u]$$

qui est diagonalisable [4].

On pose maintenant $n = u - d \in \mathbb{K}[u]$.

Il suffit de montrer maintenant que n est nilpotent. On a

$$n = u - d = \sum_{i=1}^{r} (u - \lambda_i Id_E) \circ p_i$$

car $\sum p_i = Id_E$. On a alors, pour tout $k \geqslant 1$,

$$n^k = \sum_{i=1}^{r} (u - \lambda_i Id_E)^k \circ p_i$$

car tout commute et $p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$.

Ainsi, pour $k = \max\limits_{i=1}^{r} \alpha_i$, on a pour tout $i \in [\![1; r]\!]$,

$$(u - \lambda_i Id_E)^k \circ p_i = 0$$

car $P \mid (X-\lambda_i)^k P_i$

De ce fait, on a $n^k = 0$. Donc n est nilpotent.

Ce qui conclut l'existence car on a d diagonalisable, n nilpotent, $d + n = u$ et $d \circ n = n \circ d$ puisque ce sont des polynômes en u.

Unicité : Soit d' et n' qui vérifient les conclusions de la décomposition de Dunford. On veut montrer que $d = d'$ et $n = n'$.

Comme d' et d sont des polynômes en u, ils commutent, ils sont donc codiagonalisables. Ainsi $d - d'$ est diagonalisable.

De même, n' et n sont des polynômes en u, donc ils commutent. Ainsi par le binôme de Newton, on a $n' - n$ qui est nilpotent.

Or

$$u = d + n = d' + n'$$

Donc

$$d - d' = n' - n$$

C'est donc un endomorphisme diagonalisable et nilpotent, autrement dit nul. Ainsi $d = d'$ et $n' = n$. Ce qui conclut l'unicité de la décomposition de Dunford. □

4. car les p_i sont diagonalisables (projecteurs donc $X(X-1)$ est annulateur et scindé à racines simples) et ils commutent (car polynômes en u) donc il existe une base de codiagonalisation

Remarques :

— Cette décomposition est lourde à trouver donc peu utilisé en pratique. Pour calculer l'exponentielle d'une matrice, on ne calcule pas en pratique la décomposition de Dunford.

— La décomposition de Jordan est plus poussée

— Attention, il faut que le polynôme caractéristique soit scindé (pas toujours vrai sur $\mathbb{R}$)

— Il existe d'autres preuves de la décomposition de Dunford, notamment avec la méthode de Newton.

Astuces de l'agrégatif :

On pourrait tenter de mettre ce développement dans le leçon 156 en justifiant le fait que connaître la décomposition de Dunford permet de calculer très rapidement l'exponentielle. En effet, $A = D + N$ donne $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$ car D et N commutent. Puis $\exp(N)$ est en fait une somme finie car N est nilpotente et $\exp(D)$ est facile à calculer puisque l'exponentielle d'une matrice diagonale est la diagonale des exponentielles des coefficients diagonaux et que la conjugaison par P peut sortir de la somme de l'exponentielle. Cependant, dans ce développement, on ne parle jamais d'exponentielle, je trouve donc que c'est un recasage un peu trop abusif dans une leçon dédiée à l'exponentielle matricielle.

Questions possibles :

- Pourquoi il y a unicité du projecteur qui projette sur un espace F parallèlement à un espace G ?

  Réponse : il suffit d'écrire la matrice du projecteur dans une base adaptée à $F \oplus G$

- Pourquoi un endomorphisme diagonalisable et nilpotent est nul ?

  Réponse : car X^k est annulateur, donc la seule valeur propre possible est 0, donc quand on diagonalise, on trouve l'endomorphisme nul