Etude du groupe $O(p,s)$

Leçons : 106 ; 156 ; 170

Références : CALDERO–GERMONI, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries Tome 1* (p.359)

Prérequis :

- $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme
- décomposition polaire sur $\mathbb{R}$
- l'unicité de la racine carrée pour une matrice symétrique

Définition 1. On s'intéresse aux formes quadratiques q qui sont représentées par la matrice $I_{ps} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}$ et on pose $O(p,s)$ le groupe orthogonal de la forme quadratique q non dégénérée de signature (p,s). D'un point de vue matriciel, ce sont les matrices $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAI_{ps}A = I_{ps}$.

Introduction :

On veut obtenir une écriture plus simple de $O(p,s)$, notamment pour étudier ces propriétés topologiques (compacité, connexité). C'est une bonne application de l'homéomorphisme exponentielle de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 1. Il existe un homéomorphisme

$$O(p,s) \simeq O_p(\mathbb{R}) \times O_s(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{ps}$$

Démonstration.

Étape 1 : *Montrons que* $O(p,s) \simeq (O(p,s) \cap O_n(\mathbb{R})) \times (O(p,s) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$

Soit $M \in O(p,s) \subset GL_n(\mathbb{R})$, donc il existe un unique couple $(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$ (décomposition polaire). On a alors ${}^tMM = S^2$. De plus, ${}^tM \in O(p,s)$ car

$$ {}^tMI_{ps}M = I_{ps} \iff ({}^tM)^{-1} = I_{ps}MI_{ps} \iff M^{-1} = I_{ps}{}^tMI_{ps} \iff MI_{ps}{}^tM = I_{ps}$$

De plus, $O(p,s)$ est un groupe donc ${}^tMM \in O(p,s)$, c'est-à-dire $S^2 \in O(p,s)$. On note $T = S^2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (car $T = {}^tMM$) et U l'unique matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $T = \exp(U)$. On a alors $S = \exp(\frac{U}{2})$ par unicité de la racine carrée[1]. On veut prouver que $S \in O(p,s)$ sachant que l'on a déjà $T \in O(p,s)$.

$$\begin{aligned}
T \in O(p,s) &\iff {}^tTI_{ps}T = I_{ps} \\
&\iff {}^t\exp(U) = I_{ps}exp(-U)I_{ps} \\
&\iff \exp({}^tU) = \exp(U) = \exp(-I_{ps}UI_{ps}) \\
&\iff U = -I_{ps}UI_{ps} \\
&\iff UI_{ps} + I_{ps}U = 0 \\
&\iff \frac{U}{2}I_{ps} + I_{ps}\frac{U}{2} = 0
\end{aligned}$$

1. à savoir prouver

$$\iff S \in O(p,s)$$

par l'homéomorphisme $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Ainsi $S \in O(p,s)$ et donc $O = MS^{-1} \in O(p,s)$. Ainsi la restriction de l'homéomorphisme de la décomposition polaire au groupe $O(p,s)$ donne l'homéomorphisme suivant

$$\varphi : O(p,s) \xrightarrow{\sim} (O(p,s) \cap O_n(\mathbb{R})) \times (O(p,s) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$$

Étape 2 : *Montrons que $O(p,s) \cap O_n(\mathbb{R}) \simeq O_p(\mathbb{R}) \times O_s(\mathbb{R})$*

Soit une matrice $M \in O(p,s) \cap O_n(\mathbb{R})$, on écrit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$.

On a

$${}^tMI_{ps}M = I_{ps} \iff \begin{pmatrix} {}^tAA - {}^tCC & {}^tAB - {}^tCD \\ {}^tBA - {}^tDC & {}^tBB - {}^tDD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}$$

Donc en particulier

$$(1) \begin{cases} {}^tAA - {}^tCC = I_p \\ {}^tDD - {}^tBB = I_q \end{cases}$$

Et aussi

$${}^tMM = I_n \iff \begin{pmatrix} {}^tAA + {}^tCC & {}^tAB + {}^tCD \\ {}^tBA + {}^tDC & {}^tBB + {}^tDD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$$

Donc en particulier

$$(2) \begin{cases} {}^tAA + {}^tCC = I_p \\ {}^tDD + {}^tBB = I_s \end{cases}$$

En combinant les lignes (1) et (2), on a ${}^tAA = I_p$, ${}^tDD = I_s$, ${}^tBB = 0$ et ${}^tCC = 0$ ce qui donne $A \in O_p(\mathbb{R})$, $D \in O_s(\mathbb{R})$, $B = 0$ et $C = 0$ (en utilisant le produit scalaire $\langle R, S\rangle = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tRS)}$ puisque $\langle B, B\rangle = 0$ implique $B = 0$). Ainsi l'application

$$\psi : \begin{cases} O(p,s) \cap O_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\sim} & O_p(\mathbb{R}) \times O_s(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} & \mapsto & (A, D) \end{cases}$$

est un homéomorphisme (car continue, bijective et d'inverse continue).

Étape 3 : *Montrons que $O(p,s) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{ps}$*

On pose l'ensemble $L = \{U \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) / UI_{ps} + I_{ps}U = 0\}$. On a vu à l'étape 1 que l'exponentielle est un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap L$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \cap O(p,s)$.

Soit $U \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap L$, on écrit $U = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & D \end{pmatrix}$ où A et D sont symétriques et respectivement de taille p et s. On a

$$UI_{ps} + I_{ps}U = \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & -2D \end{pmatrix} = 0$$

Par conséquent, on a $A = 0$ et $D = 0$. Donc $U = \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix}$, or $B \in \mathcal{M}_{p,s}(\mathbb{R})$, on note $B = (b_{i,j})$ (avec $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant s$) et on pose l'homéomorphisme

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap L & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^{ps} \\ \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix} & \mapsto & (b_{1,1} \dots b_{1,s} b_{2,1} \dots b_{2,s} \dots b_{p,1} \dots b_{p,s}) \end{cases}$$

Ainsi on a bien un homéomorphisme $\boxed{O(p,s) \simeq O_p(\mathbb{R}) \times O_s(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{ps}}$

□

Remarques :

— Si $p \neq 0$, $s \neq 0$, le groupe $O(p,s)$ admet quatre composantes connexes.

— Le groupe $O(p,s)$ est compacte si et seulement si $p = 0$ ou $s = 0$.

Astuces de l'agrégatif :

Il faut bien maitriser l'homéomorphisme $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et la décomposition polaire car c'est cela qui justifie les homéomorphismes que l'on manipule. De plus, il faut savoir prouver que la racine carrée (symétrique) d'une matrice symétrique est unique.

Les calculs sont assez longs notamment à l'étape 2, j'ai mis en gris les calculs que je ne faisais pas pendant le développement, d'autant plus qu'ils ne sont pas utiles à la résolution.

Questions possibles :

- Que se passe-t-il si la forme quadratique n'est pas dégénérée ?

Réponse : On veut caractériser les matrices M telles que ${}^tM\tilde{I}_{ps}M = \tilde{I}_{ps}$ avec $p + s < n$ et

$$\tilde{I}_{ps} = \begin{pmatrix} I_{ps} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

D'où en écrivant $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ puis en faisant le calcul, on a

$$\begin{pmatrix} {}^tAI_{ps}A & {}^tAI_{ps}B \\ {}^tBI_{ps}A & {}^tBI_{ps}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{ps} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a $B = 0$ et ${}^tAI_{ps}A = I_{ps}$, donc on peut choisir indifféremment C et D qui ont en tout $n \times (n - p - s)$ coefficients. D'où pour une forme quadratique de signature (p,s) d'un espace de dimension n avec $p + s \leqslant n$, on a

$$O(p,s) \simeq O_p(\mathbb{R}) \times O_s(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{ps} \times \mathbb{R}^{n(n-p-s)}$$

$$O(p,s) \simeq O_p(\mathbb{R}) \times O_s(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{(n-p)(n-s)}$$