Théorème des extrema liés

Leçons : 152 ; 159 ; 214 ; 219

Références : ROUVIÈRE, *Petit Guide du Calcul Différentiel* (p.372) et BECK–MALICK–PEYRÉ, *Objectif Agrégation* (p.20)

Prérequis :

- Théorème des sous-variétés
- Caractérisation du plan tangent [1]
- $(F^\perp)^\circ = F$ en dimension finie
- $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$

Introduction :

L'étude des extrema est très utile dans l'optimisation : chercher le maximum ou le minimum d'une quantité. Pour trouver ces extrema, on a des outils classiques comme l'étude des dérivées (en une ou plusieurs dimensions) première ou seconde. On va utiliser le théorème des extrema liés pour trouver des extrema sous contrainte. Par exemple, on pourra trouver la plus petite surface d'un parallélépipède rectangle à volume fixé [2].

Lemme 1. Soit $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \iff \bigcap_{i=1}^{k} \ker \varphi_i \subset \ker \varphi$$

Démonstration du lemme. $\boxed{\implies}$ Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{k} \ker \varphi_i$,

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \varphi_i(x) = 0$$

1. Pour ce dont on a besoin ici, il suffit d'avoir $T_a\Gamma \subset \ker dF(a)$ et l'égalité des dimensions
égalité des dimensions : Le plan tangent est de dimension k (dimension de la sous-variété). Comme $dF(a)$ est linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n-k}$, par le théorème du rang, on a

$$n = \dim \ker dF(a) + \ \mathrm{rg}\ dF(a)$$

Par surjectivité de $dF(a)$, puisque F est une submersion, on a

$$\mathrm{rg}\ dF(a) = \dim \mathbb{R}^{n-k} = n - k$$

inclusion : Soit $v = \gamma'(0)$, avec $\gamma :]-1,1[\to \Gamma \in \mathcal{C}^1$ et $a = \gamma(0)$, on a pour tout $t \in]-1,1[$,

$$F \circ \gamma(t) = 0$$

Donc on a $(F \circ \gamma)'(0) = 0$, ce qui est équivalent à avoir

$$dF(\gamma(0)).(\gamma'(0)) = 0$$

c'est à dire $dF(a).v = 0$, d'où $v \in \ker dF(a)$

2. ce qui peut servir pour optimiser le format des briques de lait par exemple

On a $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, donc

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i$$

Ainsi $\varphi(x) = 0$, donc $x \in \ker \varphi$. Ce qui prouve que

$$\bigcap_{i=1}^{k} \ker \varphi_i \subset \ker \varphi$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} \ker \varphi_i \subset \ker \varphi$, donc

$$\mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)^\circ \subset \mathrm{Vect}(\varphi)^\circ$$ [3]

Par dualité, on a

$$\mathrm{Vect}(\varphi) = (\mathrm{Vect}(\varphi)^\circ)^\perp \subset \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$$

car on est en dimension finie [4] et que le passage à l'orthogonal inverse le sens de l'inclusion.

Ainsi, comme $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi)$, on trouve le résultat souhaité

$$\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$$

□

Théorème 1 (Extrema liés)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soient $f, g_1, \dots, g_{n-k} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On pose

$$\Gamma = \{x \in U, g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_{n-k}(x) = 0\}$$

Si $f_{|\Gamma}$ admet un minimum en a et la famille $\{dg_i(a)\}_{i=1}^{n-k}$ est libre, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$ tels que

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i dg_i(a)$$

Démonstration du théorème. On remarque que Γ est une sous variété en a de dimension k comme zéro de la submersion

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & R^{n-k} \\ x & \mapsto & (g_1(x), \dots, g_{n-k}(x)) \end{array} \right.$$

On a bien $\Gamma = F^{-1}(\{0\})$ et $dF(a)$ est surjective [5]. Le plan tangent de Γ en a est

$$T_a\Gamma = \ker dF(a) = \bigcap_{i=1}^{n-k} \ker dg_i(a)$$

Soit $v \in T_a\Gamma$, il existe donc $\gamma :]-1; 1[\to \Gamma$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. Or a est un extremum de $f_{|\Gamma}$, donc 0 est un extremum de $f \circ \gamma$.

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = df(\gamma(0)).\gamma'(0) = df(a).v$$

3. Soit $x \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)^\circ$, comme $\varphi_i \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ pour tout i, on a donc $\varphi_i(x) = 0$, ainsi $\varphi(x) = 0$ (par hypothèse) et $\lambda\varphi(x) = 0$ donc pour tout $\psi \in \mathrm{Vect}(\varphi)$, $\psi(x) = 0$, donc $x \in \mathrm{Vect}(\varphi)^\circ$
4. ce qui nous donne bien $(F^\circ)^\perp = F$, on a l'inclusion $F \subset F^\circ)^\perp$ et l'égalité des dimensions
5. En effet, la matrice de $dF(a)$ est la matrice de taille $n \times (n-k)$ contenant les $dg_i(a)$ sur chaque ligne. Cette matrice est de rang $n-k$ car la famille $dg_i(a)$ est libre, donc comme $dF(a)$ va dans $\mathbb{R}^{n-k}$, on a la surjectivité de $dF(a)$ (car $\mathrm{rg}\ dF(a) = n-k = \dim \mathbb{R}^{n-k}$)

Ainsi $v \in \ker df(a)$, on a donc

$$\bigcap_{i=1}^{n-k} \ker dg_i(a) \subset \ker df(a)$$

Par le lemme précédent, on a donc

$$df(a) \in \mathrm{Vect}(dg_1(a), \dots, dg_{n-k}(a))$$

Ce qui permet de conclure la preuve du théorème. □

Application 1 (Inégalité d'Hadamard)**.** Pour tout $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$,

$$\det(x_1, x_2, \dots, x_n) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_2$$

Démonstration de l'inégalité. On va utiliser le théorème des extrema liés [6] à la fonction det sur la sous variété

$$\Gamma = \{x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n, \forall i \in \{1, \dots, n\} g_i(x_1, \dots, x_n) = \|x_i\|_2^2 - 1 = 0\}$$

Il existe un maximum de det sur Γ, car Γ est compact [7] et det est continu.

On note $v = (v_1, \dots, v_n)$ un élement de Γ tel que $\det(v) = \det(v_1, \dots, v_n)$ soit maximal.

On a $\det(v) \neq 0$ car, pour une base orthonormale, on a un déterminant valant 1, donc v ne serait pas un maximum.

Ainsi la famille $v_1, \dots, v_n$ est libre, ce qui nous dit que la famille des formes linéaires $\langle v_i, . \rangle$ est libre, or $dg_i(v) = 2\langle v_i, . \rangle$ donc la famille $dg_1(v), \dots, dg_n(v)$ est libre.

On peut donc bien appliquer le théorème des extrema liés, il existe $(\lambda_i)_1^n$ tels que
Pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$

$$d\det(v).h = \sum_{i=1}^{n} \det(v_1, \dots, v_{i-1}, h_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = \sum_{j=1}^{n} 2\lambda_j \langle v_j, h_j \rangle$$

Ainsi pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $h = (h_1, \dots, h_n) = (0, \dots, 0, v_j, 0 \dots, 0)$ (où v_j est en place j) on trouve

$$\det(v) = 2\lambda_j \|v_j\|_2^2 = 2\lambda_j$$

car $v \in \Gamma$, d'où $\lambda_j \neq 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$.

Puis pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, $h = (h_1, \dots, h_n) = (0, \dots, 0, v_j, 0 \dots, 0)$ (où v_j est en place k) on trouve

$$0 = 2\lambda_k \langle v_k, v_j \rangle$$

Comme tous les λ_i sont non nuls, on a $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ pour tout $i \neq j$.

Donc comme $v \in \Gamma$, $v_1, \dots, v_n$ est une famille orthonormale, donc de déterminant ± 1. Ainsi

$$|\det(v)| = 1$$

Pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$,

$$|\det(x_1, \dots, x_n)| = |\det(\frac{x_1}{\|x_1\|_2}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|_2})| \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_2$$

car $\frac{x_1}{\|x_1\|_2}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|_2} \in \Gamma$ et que le maximum de $|\det(\Gamma)|$ est 1.

□

6. ici on travaille dans $\mathbb{R}^{n^2}$, avec une sous variété de dimension $n^2 - n$ en utilisant $g_i(x_1, \dots, x_n) = \|x_i\|_2^2 - 1$
7. c'est la sphère unité donc un fermé borné en dimension finie

Remarques :

On peut prouver l'inégalité d'Hadamard sans avoir recours aux extrema liés (c'est fait dans le GOURDON *Algèbre* [**?**])

Astuces de l'agrégatif :

On utilise qu'un sens du lemme, donc on pourrait ne prouver qu'un sens mais bon c'est joli d'avoir une équivalence.

On peut montrer l'inégalité arithmético géométrique et l'inégalité d'Hölder avec le théorème des extrema liés.

Attention, pour la preuve du théorèmes des extrema liés, on utilise une sous-variété locale en a, donc il faudrait dire rigoureusement qu'il existe un petit voisinage de a sur lequel toutes les $dg_i(a)$ sont linéairement indépendantes (condition ouverte donc cela ne pose pas de problèmes) si on veut vraiment une sous variété, mais on n'en a pas besoin, on a seulement besoin d'un point lisse (voir Rouvière [**?**]) mais je préfère parler de sous-variétés. Pour ne pas avoir de problème de sous-variété, on peut supposer que la famille $dg_i(x)$ est libre pour tout $x \in U$. Cependant, il faudrait trouver l'ouvert U pour l'application au déterminant. On peut en trouver un car la liberté est une condition ouverte (si $\det x \neq 0$, il existe un petit voisinage autour de x tel que $\det \neq 0$ sur le voisinage) mais cela revient à considérer une sous variété sur un petit ouvert (d'où ma volonté de parler de sous-variété car on s'y ramène facilement).