Formule d'inversion de la fonction caractéristique

Leçons : 236 ; 239 ; 250 ; 260 ; 264

Références : OUVRARD, *Probabilités 2* (p.233)

Prérequis :

- la fonction de répartition F_X caractérise la loi de X (voir appendice)
- théorème de convergence dominée
- théorème de Fubini
- l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{\pi}{2}$ [1]
- le nombre de discontinuité d'une fonction croissante est dénombrable

Introduction :

En sachant que la fonction caractéristique n'est autre qu'une transformée de Fourier, on se demande qu'elle est la fonction caractéristique inverse. De plus, est ce que cette fonction inverse pourrait nous donner la loi suivie par notre variable aléatoire. On va voir qu'en effet, la fonction caractéristique caractérise la loi (on le montrera en montrant qu'elle caractérise la fonction de répartition qui caractérise la loi), on donnera l'expression explicite de la loi de probabilité pour le cas discret et le cas à densité.

Théorème 1. La fonction caractéristique d'une loi de probabilité détermine cette loi, ainsi deux variables ont même loi si et seulement si elles ont les mêmes fonctions caractéristiques.

De plus, si X est une variable aléatoire discrète, on a

$$\mathbb{P}(X = n) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-inT} \varphi_X(t) dt.$$

Et si X est une variable aléatoire réelle et que $\varphi_X \in L^1$, alors X admet une densité donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} \varphi_X(t) dt$$

Remarques :

On va se servir du fait que la fonction de répartition $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t)$ caractérise la loi. Donc il faut bien connaître ce résultat.

Démonstration. Soient $T > 0$ et deux réels a et b tels que $a < b$. On pose la fonction K_T définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{K_T(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} e^{ixt} dt}$$

1. on peut le prouver en appliquant le théorème des résidus sur un contour bien choisi

On va vouloir utiliser le théorème de convergence dominée pour avoir

$$\lim_{T\to\infty}\int_{\mathbb{R}} K_T d\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}} \lim_{T\to\infty} K_T d\mathbb{P}_X$$

Étape 1 : *Calculons* $\lim\limits_{T\to\infty} K_T$

$$\begin{aligned}
K_T(x) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^T \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}e^{ixt}dt + \int_T^0 \frac{e^{iau}-e^{ibu}}{iu}e^{-ixu}du\right) \text{[2]}\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^T \frac{e^{i(x-a)t}-e^{i(x-b)t}}{it}dt - \int_0^T \frac{e^{-i(x-a)t}-e^{-i(x-b)t}}{it}dt\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^T \frac{e^{i(x-a)t}-e^{-i(x-a)t}}{it}dt - \int_0^T \frac{e^{i(x-b)t}-e^{-i(x-b)t}}{it}dt\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^T \frac{e^{i(x-a)t}-e^{-i(x-a)t}}{it}dt - \int_0^T \frac{e^{i(x-b)t}-e^{-i(x-b)t}}{it}dt\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^T \frac{\sin((x-a)t)}{t}dt - \int_0^T \frac{\sin((x-b)t)}{t}dt\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{(x-a)T} \frac{\sin u}{u}du - \int_0^{(x-b)T} \frac{\sin u}{u}du\right) \text{[3]}
\end{aligned}$$

En posant la fonction $\phi(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{\sin u}{u}du, \quad \forall y\in\mathbb{R}$[4], on a donc

$$K_T(x) = \frac{1}{\pi}\left(\phi(T(x-a)) - \phi(T(x-b))\right)$$

Or on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du = \frac{\pi}{2}$, donc en faisant une distinction de cas $x<a$, $x=a$, $a<x<b$, $x=b$ et $b<x$, on donne la limite de $K_T(x)$.

- Si $x<a$, on a $\lim\limits_{T\to\infty} T(x-a) = -\infty$ et $\lim\limits_{T\to\infty} T(x-b) = -\infty$, d'où

$$\lim_{T\to\infty} K_T(x) = \frac{1}{\pi}(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = 0$$

- Si $x=a$, on a $\lim\limits_{T\to\infty} T(x-a) = 0$ et $\lim\limits_{T\to\infty} T(x-b) = -\infty$, d'où

$$\lim_{T\to\infty} K_T(x) = \frac{1}{\pi}(0+\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$$

- Si $a<x<b$, on a $\lim\limits_{T\to\infty} T(x-a) = +\infty$ et $\lim\limits_{T\to\infty} T(x-b) = -\infty$, d'où

$$\lim_{T\to\infty} K_T(x) = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = 1$$

- Si $x=b$, on a $\lim\limits_{T\to\infty} T(x-a) = +\infty$ et $\lim\limits_{T\to\infty} T(x-b) = 0$, d'où

$$\lim_{T\to\infty} K_T(x) = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}-0) = \frac{1}{2}$$

2. par le changement de variable $u=-t$
3. par le changement de variable $u=(x-a)t$ et $u=(x-b)t$
4. on peut remarquer que ϕ est impaire, cela nous servira pour la limite en $-\infty$

- Si $b < x$, on a $\lim_{T\to\infty} T(x-a) = +\infty$ et $\lim_{T\to\infty} T(x-b) = +\infty$, d'où

$$\lim_{T\to\infty} K_T(x) = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = 0$$

Ainsi on peut écrire

$$\lim_{T\to\infty} K_T(x) = \mathbb{1}_{]a,b[}(x) + \frac{\delta_a(x)+\delta_b(x)}{2}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \lim_{T\to\infty} K_T d\mathbb{P}_X &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]a,b[}(x) + \frac{\delta_a(x)+\delta_b(x)}{2} d\mathbb{P}_X \\ &= \mathbb{P}(X \in]a,b[) + \frac{\mathbb{P}(X=a)+\mathbb{P}(X=b)}{2}\end{aligned}$$

Étape 2 : *Calculons* $\lim_{T\to\infty} \int_{\mathbb{R}} K_T d\mathbb{P}_X$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} K_T(x) d\mathbb{P}_X &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it} e^{ixt} dt d\mathbb{P}_X \\ \text{par Fubini}^{5} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} d\mathbb{P}_X dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it} \varphi_X(t) dt\end{aligned}$$

On utilise maintenant le théorème de convergence dominée, puisque $|K_T| \leqslant \frac{2\|\phi\|_\infty}{\pi}$, d'où

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it} \varphi_X(t) dt = \mathbb{P}(X \in]a,b[) + \frac{\mathbb{P}(X=a)+\mathbb{P}(X=b)}{2}$$

Étape 3 : *Lien avec la fonction de répartition*

On sait que $F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(X \in]a,b[) + \mathbb{P}(X=b)$, donc on a

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it} \varphi_X(t) dt - \frac{\mathbb{P}(X=a)-\mathbb{P}(X=b)}{2}$$

Soit $\mathcal{D}$ les points où F_X est discontinue. L'ensemble $\mathcal{D}$ est dénombrable car F_X est croissante. Ainsi, pour tout $b \notin \mathcal{D}$, on a

$$F_X(b) = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ a\notin\mathcal{D}}} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it} \varphi_X(t) dt$$

Or $\mathbb{R}\backslash\mathcal{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$[6] et F_X est continue à droite. Ainsi, F_X est caractérisée par φ_X, donc comme F_X caractérise la loi de X, alors φ_X caractérise la loi de X.

5. puisque $\left|\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}e^{ixt}\right| = \left|\frac{1}{2\pi}e^{-i(a+b)t/2}\frac{e^{i(b-a)t}-e^{-i(b-a)t}}{it}e^{ixt}\right| = \frac{1}{\pi}\left|\frac{e^{i(b-a)t}-e^{-i(b-a)t}}{2i(b-a)t/2}\frac{b-a}{2}\right| = \frac{1}{\pi}\left|\sin\left(\frac{(b-a)t}{2}\right)\frac{b-a}{2}\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\frac{b-a}{2}$ donc l'intégrale sur $[-T,T]$ est majorée par $\frac{T(b-a)}{\pi}$ qui est intégrable sous la mesure $d\mathbb{P}_X$ puisque c'est une mesure de proba donc toutes les constantes sont intégrables.
6. puisque $\mathcal{D}$ est dénombrable

Étape 4 : *Résultat pour X une variable discrète*

Soit b un atome de la variable aléatoire X. On considère maintenant

$$\boxed{J_T(x) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ibt}e^{ixt}dt}$$

On va utiliser la même technique pour J_T qu'avec K_T en utilisant le théorème de convergence dominée.

Pour $x = b$, on a $J_T(x) = 1$. Pour $x \neq b$, on a

$$J_T(x) = \frac{1}{2T}\left[\frac{e^{-i(b-x)t}}{-i(b-x)}\right]_{-T}^{T} = \operatorname{sinc}(T(x-b))$$

Ainsi $\lim\limits_{T\to+\infty} J_T(x) = \delta_b(x)$.

On utilise Fubini[7] pour intervertir de nouveaux les intégrales :

$$\begin{aligned}
\int_R J_T(x)d\mathbb{P}_X(x) &= \int_R \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ibt}e^{ixt}dtd\mathbb{P}_X(x) \\
&= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ibt}\int_R e^{ixt}d\mathbb{P}_X(x)dt \\
&= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ibt}\varphi_X(t)dt
\end{aligned}$$

On utilise maintenant le théorème de convergence dominée puisque $|J_T(x)| = |\operatorname{sinc}(T(x-b))| \leqslant 1$ intégrable pour la mesure $d\mathbb{P}_X$, ainsi

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}\int_{\mathbb{R}} J_T d\mathbb{P}_X &= \int_{\mathbb{R}}\lim_{T\to\infty} J_T d\mathbb{P}_X \\
\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ibt}\varphi_X(t)dt &= \int_{\mathbb{R}} \delta_b(x)d\mathbb{P}_X = \mathbb{P}(X=b)
\end{aligned}$$

On a donc le résultat souhaité pour une variable aléatoire discrète.

Étape 5 : *Résultat pour X une variable réelle telle que $\varphi_X \in L^1$*

Comme $\varphi_X \in L^1$, la loi de X n'admet pas d'atome puisque

$$\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi_X(t)e^{-ibt}dt\right| \leqslant \frac{1}{2T}\|\varphi_X\|_{L^1} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$$

et on vient de prouver que si y'a un atome $\mathbb{P}(X=b) = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ibt}\varphi_X(t)dt$.

Par la première partie, on a donc

$$\mathbb{P}_X(]a,b[) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_X(t)dt$$

On applique de nouveau le théorème de Fubini[8] afin d'obtenir

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_X(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\int_a^b e^{-ixt}dx\right)\varphi_X(t)dt$$

7. puisque $\left|\frac{1}{2T}e^{-ibt}e^{ixt}\right| \leqslant \frac{1}{2T}$, ainsi l'intégrale sur $[-T,T]$ est majorée par 1 qui est intégrable pour la mesure de proba $d\mathbb{P}_X$

8. puisque les segments d'intégration sont finis et que $\varphi_X \in L^1$

$$= \int_a^b \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{-ixt} \varphi_X(t) dt dx$$

En introduisant naturellement $\boxed{g_T(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{-ixt} \varphi_X(t) dt}$, on a donc

$$\mathbb{P}_X(]a, b[) = \lim_{T \to \infty} \int_a^b g_T(x) dx$$

Pour conclure, il faut donc intervertir l'intégration et la limite, on utilise de nouveau le théorème de convergence dominée puisque $|g_T(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \|\varphi_X\|_{L^1}$ est intégrable sur $[a, b]$, ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_X(]a, b[) &= \int_a^b \lim_{T \to \infty} g_T(x) dx \\
&= \int_a^b \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} \varphi_X(t) dt \right) dx
\end{aligned}$$

Ainsi on trouve bien $f_X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} \varphi_X(t) dt$. □

Remarques :

On a montré que $\varphi_X \in L^1$ implique X est à densité, cependant la réciproque est fausse. Par exemple, une variable suivant une loi exponentielle, possède par définition une densité, or sa fonction caractéristique n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$

$$\varphi_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx} e^{-x} dx = \frac{1}{t^2 + 1} + \frac{it}{t^2 + 1}$$

Et $|\varphi_X(t)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{|t|}$ non intégrable en $+\infty$.

Il faut savoir montrer que la fonction de répartition caractérise la loi en utilisant le lemme des classes monotones. (voir appendice)

Astuces de l'agrégatif :

Ce développement est très long, je m'arrête souvent après l'étape 4, je vais plus vite sur certains points en fonction de la leçon dans laquelle on est.

Durant le développement, j'explique juste à l'oral la limite de K_T, je n'écris pas la distinction de cas proprement, je donne juste l'expression de la limite.

J'écris les fonctions K_T et J_T sous ses formes là au début car je me souviens que quand on va intégrer sous $d\mathbb{P}_X$, il faut faire apparaitre la fonction caractéristique d'où le $+$ devant ixt dans l'exponentielle, et ensuite le reste est avec un $-$ dans l'argument des exponentielles.