Formule de Poisson et Shannon

Leçons : 239 ; 246 ; 250

Références : BERNIS–BERNIS, *Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements* (p.253)

Prérequis :

- le Théorème de Dirichlet
- l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}), \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}, \|x^\alpha f^{(\beta)}\|_\infty < +\infty\}$
- la formule d'inversion de la transformée de Fourier dans la classe de Schwartz

$$2\pi f(x) = \hat{\hat{f}}(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Introduction :

La formule sommatoire de Poisson est une égalité entre des valeurs de la fonction f et ces coefficients de Fourier, elle permet notamment d'étudier le problème de l'échantillonnage de Shannon (repliements de spectre que l'on voit en physique quand les fréquences d'échantillonage sont trop grandes).

Théorème 1 (Formule Sommatoire de Poisson)**.** Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(.+2\pi n)$ converge normalement sur tout compact et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$$

où $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$.

Démonstration. **Étape 1 :** *Convergence normale de la somme.*

Puisque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe $M > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ (1+x^2)|f(x)| \leqslant M.$$

Soit $[-K,K]$ un compact de $\mathbb{R}$, pour tout $x \in [-K,K]$ et $|n| > K$, on a

$$|f(x+2\pi n)| \leqslant \frac{M}{1+(x+2\pi n)^2} \leqslant \frac{M}{1+(2\pi|n|-K)^2}$$

qui est un terme positif de série convergente. Donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f(.+2\pi n)\|_{\infty,K} \text{ converge}$$

Ainsi $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(.+2\pi n)$ converge normalement sur tout compact. Donc

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) \text{ converge}$$

On notera cette somme $F(x)$.

Étape 2 : *F est de classe $\mathcal{C}^1$.*

On peut faire la même chose avec f' car on a les mêmes hypothèses sur f et sur f' (on n'a pas utilisé le caractère $\mathcal{C}^1$ de f). Puisque $f \in \mathcal{C}^1$, $\sum f(. + 2\pi n)$ converge simplement et $\sum f'(. + 2\pi n)$ converge uniformément sur tout compact. On a $F \in \mathcal{C}^1$.

Étape 3 : *F est 2π-périodique.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} f(x + 2\pi + 2\pi n) = \sum_{n=-N-1}^{N+1} f(x + 2\pi n) - f(x - 2\pi N) - f(x - (N+1)2\pi)$

Le membre de gauche tend vers $F(x + 2\pi)$ et le membre de droit tend vers $F(x)$ quand N tend vers l'infini. Donc $F(x) = F(x + 2\pi)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi F est 2π-périodique.

Étape 4 : *Utilisation du théorème de Dirichlet sur F.*

On a $F \in \mathcal{C}^1$ et 2π-périodique, donc on peut appliquer le théorème de Dirichlet.

Ainsi $F(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(F) e^{inx}$.

On calcule donc les coefficients de Fourier de F. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
c_n(F) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x + 2\pi k) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + 2\pi k) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(u) e^{-inu} du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-inu} du \\
&= \frac{1}{2\pi} \hat{f}(n)
\end{aligned}$$

D'où l'égalité pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

□

Proposition 1. Si de plus $\hat{f}$ est à support inclus dans $[-F, F]$ où $F \in \mathbb{R}_+^*$ [1] et si $2F \leqslant 2\pi$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)\ \mathrm{sinc}(\pi(x - k))$$

Démonstration. On a $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ car l'espace de Schwartz est stable par transformée de Fourier. Ainsi en appliquant la formule sommatoire de Poisson à $\hat{f}$, on trouve

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi + 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\hat{f}}(k) e^{ik\xi}$$

Par la formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\hat{\hat{f}}(k) = 2\pi f(-k)$$

Donc

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi + 2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-k) e^{ik\xi}.$$

On a $2F \leqslant 2\pi$, donc $\hat{f}(\xi + 2\pi k) = 0$ si $|\xi + 2\pi k| > \pi$.[2]
Donc si $\xi \in [-\pi, \pi], \quad \forall k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}, \quad |\xi + 2\pi k| > \pi$.
Or on sait que le support de $\hat{f}$ est inclus dans $[-\pi, \pi]$, donc on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}(\xi) \hat{f}(\xi + 0) \\
&= \mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}(\xi) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi + 2\pi k) \\
&= \mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}(\xi) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-k) e^{ik\xi}
\end{aligned}$$

On utilise de nouveau l'inversion de Fourier, afin d'avoir pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-k) e^{ik\xi} e^{i\xi x} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-k) e^{i(k+x)\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) e^{i(x-k)\xi} d\xi
\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) e^{i(x-k)\xi}$ converge normalement sur $[-\pi, \pi]$ donc uniformément sur $[-\pi, \pi]$, puisque

$$\begin{aligned}
|f(k) e^{i(x-k)\xi}| &\leqslant |f(k)| \\
&\leqslant \frac{M}{1 + k^2}
\end{aligned}$$

Ainsi l'interversion du signe intégral et du signe somme est licite, puisqu'on intègre sur le compact $[-\pi, \pi]$.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x-k)\xi} d\xi$$

1. On note F car cela représente la fréquence en physique.
2. par définition du support de $\hat{f}$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) \left[\frac{e^{i(x-k)\xi}}{i(x-k)} \right]_{-\pi}^{\pi} & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{k \neq x} f(k) \left[\frac{e^{i(x-k)\xi}}{i(x-k)} \right]_{-\pi}^{\pi} + f(k) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) \frac{e^{i(x-k)\pi} - e^{-i(x-k)\pi}}{i(x-k)} & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{k \neq x} f(k) \frac{e^{i(x-k)\pi} - e^{-i(x-k)\pi}}{i(x-k)} + f(k) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)\ 2\pi\ \mathrm{sinc}(\pi(x-k))$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)\ \mathrm{sinc}(\pi(x-k))$$

Ce qui conclut la preuve du théorème. □

Astuces de l'agrégatif :

Il faut faire attention au sens que l'on donne aux séries que l'on manipule (famille sommable ? limite d'une somme partielle ?)

La définition de la transformée de Fourier n'est pas unique, j'ai choisi de prendre celle-ci car elle coïncide avec la définition que je me donne dans mon plan. J'ai donc changé la formule sommatoire de Poisson par rapport à celle qu'on a l'habitude de voir (voir l'appendice sur les conventions de Fourier)

Il faut savoir prouver la formule d'inversion de Fourier. Une technique est de poser la fonction

$$f_\varepsilon : t \mapsto e^{-\varepsilon t^2} e^{itx} \hat{f}(t)$$

et de faire tendre ε vers 0.

Remarques :

Si on considère les coefficients de Fourier pour des pulsations quelconques on aurait : $\forall T > 0, \omega = \dfrac{2\pi}{T}, \forall f \in \mathcal{C}^1, f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right), f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{-\infty}^{+\infty} f(x+nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n\omega) e^{in\omega x}$$

et $\forall s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, si supp$\hat{s} \subset [-F, F]$ où $0 < F \leqslant \dfrac{f}{2}$, on pose $t = \dfrac{1}{f}$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(\xi + nf) = t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\hat{s}}(2\pi nt) e^{2\pi int\xi}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, s(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} s(n2\pi t) \mathrm{sinc}(\frac{f}{2}x - \pi n)$$

On a noté f la fréquence d'échantillonage, t la période d'échantillonage et F la plus grande fréquence présente dans le spectre en fréquence du signal.

$$\begin{tikzcd}
\text{signal physique} \arrow[r, "\text{passe-bas en fréquence}", "\text{de coupure } F > 0"'] & \text{signal } s \text{ tel que } \operatorname{supp}(s) \subset [-F, F] \arrow[d, "\text{échantillonage de période } 2\pi t \text{ sur le signal et } f = \frac{1}{t} \text{ sur le spectre } \hat{s}", "f \geqslant 2F"'] \\
\text{signal } s & \{s(n2\pi t)\}_{n \in \mathbb{N}} \arrow[l, "\text{critère de}", "\text{Shannon}"']
\end{tikzcd}$$