Formule de Poisson et équivalent de Θ

Leçons : 224 ; 243 ; 246

Références : GOURDON, *Analyse* (p.269)

Prérequis :

- théorème de Dirichlet
- la convergence normale implique la convergence uniforme qui implique la convergence simple
- notions de série entière
- la formule de Cauchy
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\omega x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}$

Introduction :

La formule sommatoire est une identité classique et est un moyen très efficace pour prouver l'équation que vérifie la fonction Θ de Jacobi. En effet, on obtient des informations au voisinage de 1 en connaissant des informations en 0. La fonction Θ de Jacobi est une fonction spéciale, donc l'écriture usuelle est une fonction à deux variables.

Théorème 1 (Formule Sommatoire de Poisson)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) \underset{x \to \pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Alors la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(. + 2\pi n)$ converge normalement sur tout compact et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

où $\displaystyle\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$.

Démonstration. **Étape 1 :** *Convergence normale de la somme.*

Par hypothèse, il existe $M > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \leqslant \frac{M}{1 + x^2}.$$

Soit $[-K, K]$ un compact de $\mathbb{R}$, pour tout $x \in [-K, K]$ et $|n| > K$, on a

$$|f(x + 2\pi n)| \leqslant \frac{M}{1 + (x + 2\pi n)^2} \leqslant \frac{M}{1 + (2\pi|n| - K)^2}$$

qui est un terme positif de série convergente. Donc

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f(. + 2\pi n)\|_{\infty, K} \text{ converge}$$

Ainsi $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(.+2\pi n)$ converge normalement sur tout compact. Donc

$$\text{pour tout } x\in\mathbb{R},\quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) \text{ converge}$$

On notera cette somme $F(x)$.

Étape 2 : *F est de classe $\mathcal{C}^1$.*

On peut faire la même chose avec f' car on a les mêmes hypothèses sur f et sur f' (on n'a pas utilisé le caractère $\mathcal{C}^1$ de f). Puisque $f\in\mathcal{C}^1$, $\sum f(.+2\pi n)$ converge simplement et $\sum f'(.+2\pi n)$ converge uniformément sur tout compact. On a $F\in\mathcal{C}^1$.

Étape 3 : *F est 2π-périodique.*

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} f(x+2\pi+2\pi n) = \sum_{n=-N-1}^{N+1} f(x+2\pi n) - f(x-2\pi N) - f(x-(N+1)2\pi)$

Le membre de gauche tend vers $F(x+2\pi)$ et le membre de droit tend vers $F(x)$ quand N tend vers l'infini. Donc $F(x) = F(x+2\pi)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Ainsi F est 2π-périodique.

Étape 4 : *Utilisation du théorème de Dirichlet sur F.*[1]

On a $F\in\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique, donc on peut appliquer le théorème de Dirichlet.

Ainsi $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(F)e^{inx}$.

On calcule donc les coefficients de Fourier de F. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
c_n(F) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-inx}dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi k)e^{-inx}dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+2\pi k)e^{-inx}dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(u)e^{-inu}du\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-inu}du\\
&= \frac{1}{2\pi}\hat{f}(n)
\end{aligned}$$

D'où l'égalité pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{inx}$$

□

1. On n'est pas obligé d'utiliser le théorème de Dirichlet. Comme $F\in\mathcal{C}^0_{2\pi}\cap\mathcal{C}^1$, la série de Fourier converge et comme $F\in\mathcal{C}^0$, par le théorème de Fejer, F est égale à sa série de Fourier si celle-ci converge et c'est le cas.

Définition 1. On définit $\Theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{n^2}$

Proposition 1. Θ est une série entière de rayon de convergence égal à 1.

Démonstration. On peut écrire

$$\Theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \text{ où } a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est un carré non nul} \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On voit alors que R le rayon de convergence vaut 1, puisque si $|z| > 1$, la série diverge grossièrement et pour $r \leqslant 1$, on a $|a_n|r^n$ borné. Donc $R = 1$. □

Théorème 2. On a $\Theta(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$.

Démonstration. On pose la fonction $f : x \mapsto e^{-\omega x^2}$ pour $\omega > 0$. La fonction f vérifie les hypothèses du théorème précédent, donc on peut appliquer la formule sommatoire de Poisson au point $x = 0$. On a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

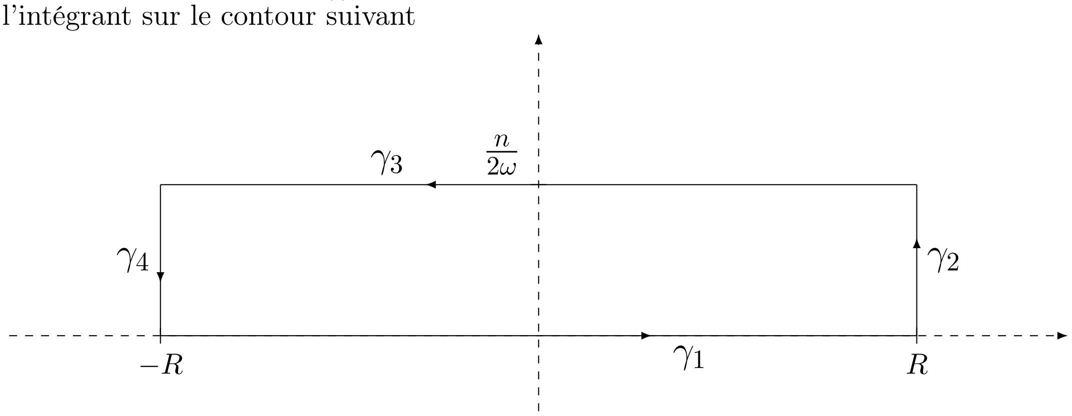
Or on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\omega 4\pi^2 n^2} = \Theta(e^{-\omega 4\pi^2})$$

On veut donc calculer $\hat{f}(n)$

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega x^2} e^{-inx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega(x+\frac{in}{2\omega})^2} e^{-\frac{n^2}{4\omega}} dx \\ &= e^{-\frac{n^2}{4\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega(x+\frac{in}{2\omega})^2} dx \end{aligned}$$

On veut calculer donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega(x+\frac{in}{2\omega})^2} dx$ en posant la fonction holomorphe $g : z \mapsto e^{-\omega z^2}$ et en l'intégrant sur le contour suivant



On trouve donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega(x+\frac{in}{2\omega})^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}$.

Ainsi

$$\Theta(e^{-\omega 4\pi^2}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{n^2}{4\omega}}\sqrt{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\Theta(e^{-\frac{1}{4\omega}})$$

On fait le changement de variable $x = e^{-\omega 4\pi^2}$, on a $x \to 1^-$ quand $\omega \to 0^+$. $\Theta(e^{-\frac{1}{4\omega}})$ tend vers 1 quand ω tend vers 0^+ car $e^{-\frac{1}{4\omega}}$ tend vers 0. Donc

$$\Theta(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4\pi^2\pi}{-\ln(x)}} \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$$

car [2] $-\ln(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} 1-x$. On a donc bien

$$\Theta(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$$

□

Astuces de l'agrégatif :

Il faut faire attention à la définition de la convergence de la somme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(.+2\pi n)$.

J'ai changé la formule sommatoire de Poisson par rapport à celle qu'on a l'habitude de voir car je voulais que la convention que j'ai prise pour la transformée de Fourier soit la même que celle de mon plan. (voir l'appendice sur les conventions de Fourier)

Dans un soucis de temps, je ne détaille pas l'intégration sur le contour dans le développement.

On revient sur le calcul de l'intégrale sur le contour : g est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc

$$\underbrace{\int_{\gamma_1} g(z)dz}_{I_1} + \underbrace{\int_{\gamma_2} g(z)dz}_{I_2} + \underbrace{\int_{\gamma_3} g(z)dz}_{I_3} + \underbrace{\int_{\gamma_4} g(z)dz}_{I_4} = 0$$

On pose :

$$\gamma_1 : \left\{\begin{array}{ccc} [-R;R] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & t \end{array}\right. \qquad \gamma_2 : \left\{\begin{array}{ccc} [0;\frac{n}{2\omega}] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & R+it \end{array}\right.$$
$$\gamma_3 : \left\{\begin{array}{ccc} [-R;R] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & -t+\frac{in}{2\omega} \end{array}\right. \qquad \gamma_4 : \left\{\begin{array}{ccc} [0;\frac{n}{2\omega}] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & -R+i(\frac{n}{2\omega}-t) \end{array}\right.$$

$$I_1 = \int_{\gamma_1} g(z)dz = \int_{-R}^{R} e^{-\omega t^2}dt \qquad I_2 = \int_{\gamma_2} g(z)dz = \int_0^{\frac{n}{2\omega}} e^{-\omega(R+it)^2}idt$$
$$I_3 = \int_{\gamma_3} g(z)dz = -\int_{-R}^{R} e^{-\omega(t-\frac{in}{2\omega})^2}dt \quad I_4 = \int_{\gamma_4} g(z)dz = -\int_0^{\frac{n}{2\omega}} e^{-\omega(R-i(\frac{n}{2\omega}-t))^2}idt$$

Or I_2 et I_4 convergent vers 0 quand R tend vers $+\infty$ par convergence dominée car $e^{-\omega(R-i(\frac{n}{2\omega}-t))^2}i$ tend vers 0 et on a $|e^{-\omega(R-i(\frac{n}{2\omega}-t))^2}i| \leqslant e^{-\omega R}$ intégrable sur $[0;\frac{n}{2\omega}]$.

De plus, I_1 tend vers $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega t^2}dt$ par convergence dominée avec $|\mathbb{1}_{-R;R}e^{-\omega t^2}| \leqslant e^{-\omega t^2}$ intégrable.

2. ici, on ne compose pas des équivalents, on prend juste une puissance et ça on a le droit

De même, I_3 tend vers $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega(t-\frac{in}{2\omega})^2}dt$ par convergence dominée par une majoration similaire.

En conclusion, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega t^2}dt - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega(t-\frac{in}{2\omega})^2}dt = 0$.

D'où,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega t^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega(t-\frac{in}{2\omega})^2}dt$$