Formule de Poisson et fonction Θ

Leçons : 246 ; 265

Références : GOURDON, *Analyse* (p.269)

Prérequis :

- théorème de Dirichlet
- la convergence normale implique la convergence uniforme qui implique la convergence simple
- la formule de Cauchy
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\omega x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}$

Introduction :

La formule sommatoire est une identité classique et est un moyen très efficace pour prouver l'équation que vérifie la fonction Θ de Jacobi. En effet, on obtient des informations au voisinage de 1 en connaissant des informations en 0. La fonction Θ de Jacobi est une fonction spéciale, donc l'écriture usuelle est une fonction à deux variables. [1]

Théorème 1 (Formule Sommatoire de Poisson)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(.+2\pi n)$ converge normalement sur tout compact et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

où $\hat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$.

Démonstration. **Étape 1 :** *Convergence normale de la somme.*

Par hypothèse, il existe $M > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \leqslant \frac{M}{1+x^2}.$$

Soit $[-K, K]$ un compact de $\mathbb{R}$, pour tout $x \in [-K, K]$ et $|n| > K$, on a

$$|f(x+2\pi n)| \leqslant \frac{M}{1+(x+2\pi n)^2} \leqslant \frac{M}{1+(2\pi|n|-K)^2}$$

1. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $\tau \in \mathbb{H} := \{v \in \mathbb{C}, \mathscr{I}(v) > 0\}$, on a

$$\theta(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(i\pi n\tau + 2i\pi nz)$$

qui est un terme positif de série convergente. Donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f(.+2\pi n)\|_{\infty,K} \text{ converge}$$

Ainsi $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(.+2\pi n)$ converge normalement sur tout compact. Donc

$$\text{pour tout } x\in\mathbb{R},\quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) \text{ converge}$$

On notera cette somme $F(x)$.

Étape 2 : *F est de classe $\mathcal{C}^1$.*
On peut faire la même chose avec f' car on a les mêmes hypothèses sur f et sur f' (on n'a pas utilisé le caractère $\mathcal{C}^1$ de f). Puisque $f\in\mathcal{C}^1$, $\sum f(.+2\pi n)$ converge simplement et $\sum f'(.+2\pi n)$ converge uniformément sur tout compact. On a $F\in\mathcal{C}^1$.

Étape 3 : *F est 2π-périodique.*

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} f(x+2\pi+2\pi n) = \sum_{n=-N-1}^{N+1} f(x+2\pi n) - f(x-2\pi N) - f(x-(N+1)2\pi)$

Le membre de gauche tend vers $F(x+2\pi)$ et le membre de droit tend vers $F(x)$ quand N tend vers l'infini. Donc $F(x)=F(x+2\pi)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Ainsi F est 2π-périodique.

Étape 4 : *Utilisation du théorème de Dirichlet sur F.*
On a $F\in\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique, donc on peut appliquer le théorème de Dirichlet.
Ainsi $F(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(F)e^{inx}$.
On calcule donc les coefficients de Fourier de F. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
c_n(F) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi k)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+2\pi k)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(u)e^{-inu}du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-inu}du \\
&= \frac{1}{2\pi}\hat{f}(n)
\end{aligned}$$

D'où l'égalité pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{inx}$$

□

Définition 1. On définit $\Theta(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi u n^2}$

Théorème 2. Pour tout $u > 0$, on a

$$\Theta(u) = \sqrt{\frac{1}{u}}\Theta\left(\frac{1}{u}\right)$$

Démonstration. On pose la fonction $f : x \mapsto e^{-\pi\omega x^2}$ pour $\omega > 0$. La fonction f vérifie les hypothèses du théorème précédent, donc on peut appliquer la formule sommatoire de Poisson au point $x = 0$. On a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

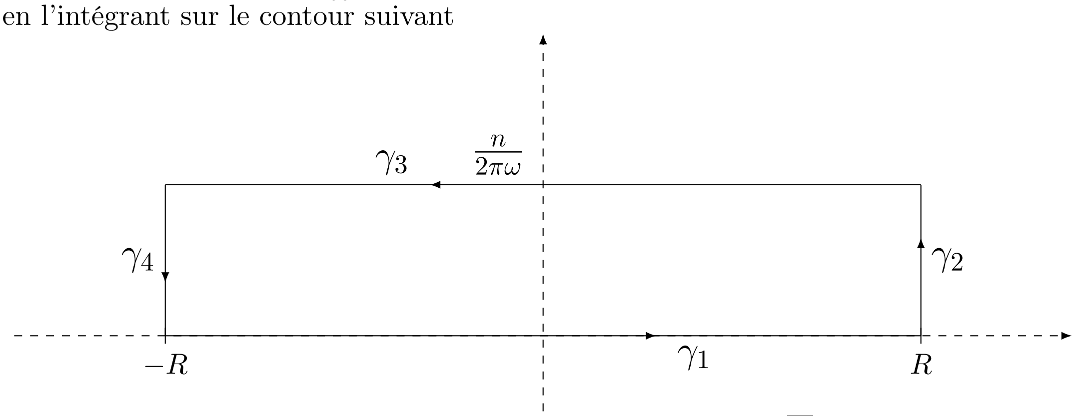
Or on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\omega 4\pi^2 n^2} = \Theta(4\pi^2\omega)$$

On veut donc calculer $\hat{f}(n)$

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-inx}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\omega x^2}e^{-inx}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\omega(x+\frac{in}{2\pi\omega})^2}e^{-\frac{n^2}{4\pi\omega}}dx \\ &= e^{-\frac{n^2}{4\pi\omega}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\omega(x+\frac{in}{2\pi\omega})^2}dx\end{aligned}$$

On veut calculer donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\omega(x+\frac{in}{2\pi\omega})^2}dx$ en posant la fonction holomorphe $g : z \mapsto e^{-\pi\omega z^2}$ et en l'intégrant sur le contour suivant



On trouve donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\omega(x+\frac{in}{2\pi\omega})^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\omega x^2}dx = \sqrt{\frac{1}{\omega}}$.

Ainsi

$$\Theta(4\pi^2\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{n^2}{4\pi\omega}}\sqrt{\frac{1}{\omega}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2\omega}}\Theta\left(\frac{1}{4\pi^2\omega}\right)$$

On fait le changement de variable $u = 4\pi^2\omega$, on trouve alors

$$\Theta(u) = \sqrt{\frac{1}{u}}\Theta\Big(\frac{1}{u}\Big)$$

$\square$

Astuces de l'agrégatif :

Il faut faire attention à la définition de la convergence de la somme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(. + 2\pi n)$.

J'ai changé la formule sommatoire de Poisson par rapport à celle qu'on a l'habitude de voir car je voulais que la convention que j'ai prise pour la transformée de Fourier soit la même que celle de mon plan. (voir l'appendice sur les conventions de Fourier)

Dans un soucis de temps, je ne détaille pas l'intégration sur le contour dans le développement.

On revient sur le calcul de l'intégrale sur le contour : g est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc

$$\underbrace{\int_{\gamma_1} g(z)dz}_{I_1} + \underbrace{\int_{\gamma_2} g(z)dz}_{I_2} + \underbrace{\int_{\gamma_3} g(z)dz}_{I_3} + \underbrace{\int_{\gamma_4} g(z)dz}_{I_4} = 0$$

On pose :

$$\gamma_1 : \left\{\begin{array}{ccc} [-R;R] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & t \end{array}\right. \qquad \gamma_2 : \left\{\begin{array}{ccc} [0;\frac{n}{2\pi\omega}] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & R+it \end{array}\right.$$

$$\gamma_3 : \left\{\begin{array}{ccc} [-R;R] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & -t+\frac{in}{2\pi\omega} \end{array}\right. \qquad \gamma_4 : \left\{\begin{array}{ccc} [0;\frac{n}{2\pi\omega}] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & -R+i(\frac{n}{2\pi\omega}-t) \end{array}\right.$$

$$I_1 = \int_{\gamma_1} g(z)dz = \int_{-R}^{R} e^{-\pi\omega t^2}dt \qquad I_2 = \int_{\gamma_2} g(z)dz = \int_0^{\frac{n}{2\pi\omega}} e^{-\pi\omega(R+it)^2}idt$$

$$I_3 = \int_{\gamma_3} g(z)dz = -\int_{-R}^{R} e^{-\pi\omega(t-\frac{in}{2\pi\omega})^2}dt \qquad I_4 = \int_{\gamma_4} g(z)dz = -\int_0^{\frac{n}{2\pi\omega}} e^{-\pi\omega(R-i(\frac{n}{2\pi\omega}-t))^2}idt$$

Or I_2 et I_4 convergent vers 0 quand R tend vers $+\infty$ par convergence dominée car $e^{-\pi\omega(R-i(\frac{n}{2\pi\omega}-t))^2}i$ tend vers 0 et on a $|e^{-\pi\omega(R-i(\frac{n}{2\pi\omega}-t))^2}i| \leqslant e^{-\pi\omega R}$ intégrable sur $[0;\frac{n}{2\pi\omega}]$.

De plus, I_1 tend vers $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\omega t^2}dt$ par convergence dominée avec $|\mathbb{1}_{-R;R}e^{-\pi\omega t^2}| \leqslant e^{-\pi\omega t^2}$ intégrable.

De même, I_3 tend vers $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\omega(t-\frac{in}{2\pi\omega})^2}dt$ par convergence dominée par une majoration similaire.

En conclusion, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\omega t^2}dt - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\omega(t-\frac{in}{2\pi\omega})^2}dt = 0$.

D'où,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\omega t^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\omega(t-\frac{in}{2\pi\omega})^2}dt$$