Formule des compléments

(rédigé par Emilie Tezenas)

LEÇONS : 236 ; 239 ; 265

RÉFÉRENCES : BERNIS–BERNIS, *Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements* (p.74)

Prérequis :

- Théorème des Résidus
- Convergence dominée
- Fubini-Tonelli
- Changement de variable sur $\mathbb{R}^d$
- le prolongement analytique
- les déterminations du logarithme complexe

Introduction :

La formule des compléments est une équation fonctionnelle qui permet de faire le lien entre la fonction Γ et le sinus complexe. On montre l'égalité sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et l'on peut ensuite prolonger le résultat à la bande ouverte de $\mathbb{C}$ correspondante en utilisant l'holomorphie des fonctions en jeu sur cet ensemble et leur égalité sur un domaine contenant un point d'accumulation.

Théorème 1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) \in]0;1[$,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Démonstration. **Étape 1 :** *Calcul sous forme d'intégrale de* $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ *pour* $x \in]0,1[$
Soit donc $x \in]0;1[$. On a :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \int_0^\infty s^{-x}e^{-s}\mathrm{d}s$$

Les intégrandes étant toutes positives, on applique Fubini-Tonelli pour poursuivre le calcul en interversant les intégrales.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{t}{s}\right)^x \frac{1}{t} e^{-(t+s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

On réalise maintenant le changement de variable suivant :

$$\varphi : \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \to & (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ (s,t) & \mapsto & (s+t, \frac{t}{s}) \end{cases}$$

φ est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. On calcule le Jacobien de son inverse, en notant $u = s + t$ et $v = \frac{t}{s}$:

$$|J_\varphi| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{t}{s^2} & \frac{1}{s} \end{vmatrix} = \frac{s+t}{s^2}$$

D'où

$$|J_{\varphi^{-1}}| = \frac{s^2}{s+t} = \frac{u}{(1+v)^2}$$

.

D'autre part, on a $\frac{1}{t} = \frac{1+v}{uv}$. Revenons maintenant au calcul, où on effectue le changement de variable, puis on utilise encore Fubini-Tonelli plusieurs fois :

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \int_0^\infty \int_0^\infty v^x e^{-u} \frac{1+v}{uv} \frac{u}{(1+v)^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&\overset{F.T}{=} \int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{1+v} \left(\int_0^\infty e^{-u} \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}v \\
&= \int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{1+v} \mathrm{d}v \\
&= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}v}{v^{1-x}(1+v)}
\end{aligned}$$

On utilise l'invariance de $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ par changement de variable $x \mapsto 1-x$, pour finalement obtenir

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}v}{v^x(1+v)}$$

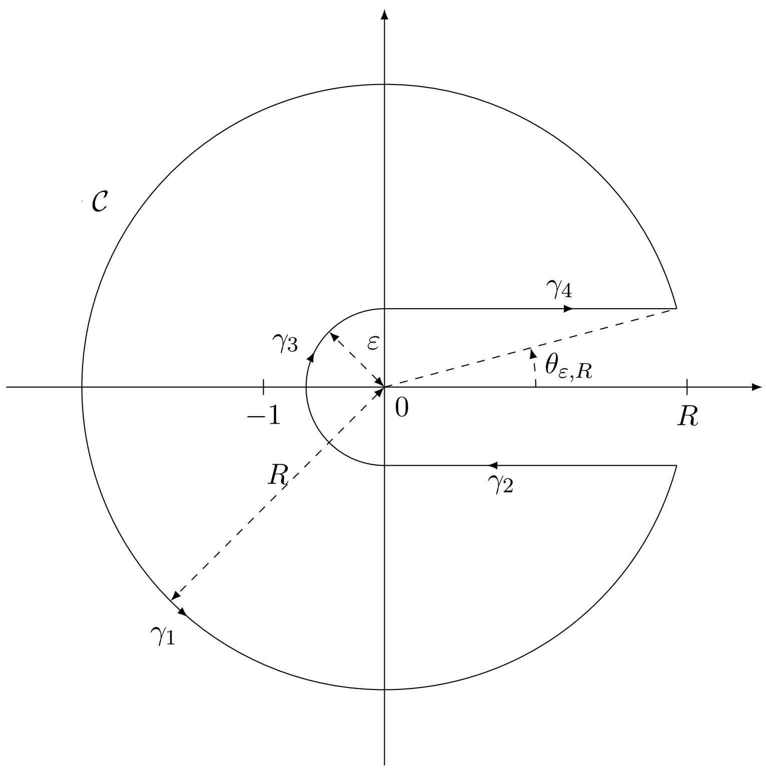
Γ est bien définie pour $\{\Re > 0\}$, donc comme $x \in [0,1]$, $\Gamma(x)\Gamma(1-x) < \infty$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est donc intégrable sur $[0; +\infty]$.

On a donc obtenu une expression de $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ sous forme intégrale.

Étape 2 : *Calcul de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^x(1+v)}$ *à l'aide du théorème des résidus.*

On va utiliser le Théorème des Résidus appliqué à la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z^x(1+z)} \end{array} \right.$

sur le contour suivant :



f est méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ et possède un pôle simple en -1. On intègre f sur le contour $\mathcal{C}$ présenté sur la figure ci-dessus. On décompose ce contour en quatre parties, les deux segments et les deux arcs de cercle, que l'on paramètrera séparément. On fait ensuite tendre ε vers 0 et R vers $+\infty$.
Munis de ce contour, on peut maintenant choisir une détermination du logarithme complexe qui nous permet de bien définir le z^x dans l'expression de f. On choisit la détermination de droite $\mathbb{R}^+$, i.e. pour $z \in \mathbb{C}$, $\quad z^x = e^{x(\ln(|z|)+\theta)}$, avec $\theta \in]0; 2\pi[$. Il faudra dans la suite du calcul faire attention à l'argument des complexes lorsque ε tend vers 0 : sur le segment γ_2, l'argument de $z^x = e^{x\log(z)}$ tend vers 2π, alors qu'il tend vers 0 sur le segment γ_4.

Théorème des Résidus
Le théorème des Résidus appliqué à f donne

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi \mathrm{Res}_{-1}(f) = 2i\pi(-1)^{-x} = 2i\pi e^{-i\pi x}$$

Il est important de remarquer que le fait que $(-1)^{-x} = e^{-i\pi x}$ provient de la détermination du logarithme choisie.

Intégrale sur γ_1
On utilise la paramétrisation suivante :

$$\gamma_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} [\theta_{\varepsilon,R}; 2\pi - \theta_{\varepsilon,R}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & Re^{it} \end{array} \right.$$

Où $\theta_{\varepsilon,R} = \arctan \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+R^2}} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$

L'intégrale de f sur cet arc de cercle devient alors :

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon,R}} \frac{iRe^{it}}{(Re^{it})^x(1+Re^{it})}\mathrm{d}t$$

$$\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{(Re^{it})^x(1+Re^{it})}\mathrm{d}t$$

où la limite en $\varepsilon \to 0$ est obtenue par un rapide Théorème de Convergence Dominée applicable grâce à l'intégrabilité sur le segment $[0;2\pi]$ de l'intégrande.
On cherche maintenant à passer à la limite en $R \to +\infty$. On remarque que pour $t \in [0;2\pi]$, on a :

$$\left|\frac{iRe^{it}}{(Re^{it})^x(1+Re^{it})}\right| \leq \frac{R}{R^x(R-1)} \underset{R\to+\infty}{\sim} R^{-x} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{car } x>0$$

Une majoration par inégalité triangulaire donne alors :

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}}{\longrightarrow} 0$$

Intégrale sur γ_3 On utilise le même genre de paramétrisation :

$$\gamma_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} [\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \varepsilon e^{i(2\pi-t)} \end{array} \right.$$

L'intégrale de f sur cet arc de cercle devient alors :

$$\int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{-i\varepsilon e^{-it}}{(\varepsilon e^{-it})^x(1+\varepsilon e^{-it})}\mathrm{d}t$$

Ici encore une majoration par inégalité triangulaire suffit à conclure sur la limite de cette intégrale quand $\varepsilon \to 0$. En effet,

$$\left|\frac{-i\varepsilon e^{-it}}{(\varepsilon e^{-it})^x(1+\varepsilon e^{-it})}\right| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon^x(1-\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \varepsilon^{1-x} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{car } 1-x>0$$

Intégrale sur γ_2 :
On paramétrise le segment comme suit :

$$\gamma_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} [-\sqrt{R^2-\varepsilon^2};0] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & -i\varepsilon - t \end{array} \right.$$

L'intégrale de f sur ce segment devient alors :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z &= \int_{-\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}^{0} \frac{-\mathrm{d}t}{(-i\varepsilon-t)^x(1-t-i\varepsilon)} \\ &= -\int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \frac{\mathrm{d}t}{(-i\varepsilon+t)^x(1+t-i\varepsilon)} \\ &= -\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0;\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\frac{\mathrm{d}t}{(-i\varepsilon+t)^x(1+t-i\varepsilon)}\end{aligned}$$

Où la deuxième égalité est obtenue en effectuant le changement de variable $t \mapsto -t$.
On applique le Théorème de Convergence Dominée pour calculer la limite en $\varepsilon \to 0$.

— Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{1}_{[0;\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\frac{-1}{(-i\varepsilon+t)^x(1+t-i\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{[0;R]}\frac{-1}{(te^{2i\pi})^x(1+t)}$ en tenant compte de la détermination du logarithme choisie, l'argument de $-i\varepsilon+t$ tend vers 2π.

— Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $\left|\mathbb{1}_{[0;\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\frac{1}{(-i\varepsilon+t)^x(1+t-i\varepsilon)}\right| \leq \frac{1}{t^x(1+t)}$. En effet, pour $t \in \mathbb{R}_+$,

$$|t-i\varepsilon| = \sqrt{t^2+\varepsilon^2} \geq \sqrt{t^2} = t$$

et de même, $|1+t-i\varepsilon| = \sqrt{(1+t)^2+\varepsilon^2} \geq 1+t$.
De plus, on a vu à la fin de la première étape que $\frac{1}{t^x(1+t)}$ est intégrable (le fait que $x \in [0,1]$ est crucial). On a donc dominé l'intégrande par une fonction intégrable sur $[0;+\infty]$.

Le Théorème de Convergence Dominée donne alors

$$\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0;R]}(t)\frac{\mathrm{d}t}{t^x e^{2i\pi x}(1+t)}$$

Un deuxième TCD, avec la même domination donne également, pour la limite en $R \to +\infty$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}}{\longrightarrow} -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x e^{2i\pi x}(1+t)}$$

Intégrale sur γ_4 :

On paramétrise le segment de manière similaire à γ_2 :

$$\gamma_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;\sqrt{R^2-\varepsilon^2}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & i\varepsilon + t \end{array} \right.$$

L'intégrale de f sur ce segment devient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z &= \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \frac{\mathrm{d}t}{(i\varepsilon+t)^x(1+t+i\varepsilon)} \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0;\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\frac{\mathrm{d}t}{(i\varepsilon+t)^x(1+t+i\varepsilon)} \end{aligned}$$

On applique encore le Théorème de Convergence Dominée pour passer à la limite en $\varepsilon \to 0$:

— Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{1}_{[0;\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\frac{1}{(i\varepsilon+t)^x(1+t+i\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{[0;R]}\frac{1}{t^x(1+t)}$ en tenant compte de la détermination du logarithme choisie, l'argument de $i\varepsilon + t$ tend vers 0.

— On domine de la même façon que précédemment : pour $t \in \mathbb{R}_+$, $\left|\mathbb{1}_{[0;\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\frac{1}{(i\varepsilon+t)^x(1+t+i\varepsilon)}\right| \leq \frac{1}{t^x(1+t)}$, intégrable sur $[0;+\infty]$.

On obtient donc, après avoir appliqué une nouvelle fois le TCD pour passer à la limite en $R \to +\infty$,

$$\int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$$

Retour au Théorème des Résidus

En passant à la limite en $\varepsilon \to 0$, puis en $R \to +\infty$ dans l'égalité donnée par le Théorème des Résidus, on obtient :

$$\begin{aligned} 2i\pi e^{-i\pi x} &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \left(\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z\right) \\ &= 0 - e^{-2i\pi x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} + 0 + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} \end{aligned}$$

$$= (1 - e^{-2i\pi x}) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$$

On en déduit que pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} = 2i\pi \frac{e^{-i\pi x}}{1 - e^{-2i\pi x}} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

On a donc finalement bien montré que pour tout $x \in]0;1[$,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

On étend la validité de cette formule à tout $z \in \Re \in]0;1[$ par prolongement analytique des fonctions holomorphes $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ et $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ sur cette bande. $\square$

Astuces de l'agrégatif :

Le développement est long, il faut passer plus rapidement sur certaines intégrales mais sans oublier les arguments essentiels qui permettent de justifier ce que l'on fait. Personnellement, je fais celle sur γ_2 en priorité puis celle sur γ_1 si j'ai le temps.