Image de l'exponentielle

Leçons : 153 ; 156 ; 214

Références : ZAVIDOVIQUE, *Un max de Math* (p.48) [?] et LESESVRE–MONTAGNON–LE BARBENCHON–PIERRON, *131 développements pour l'oral* (p. 178) [?]

Ce développement est un résultat sur l'exponentielle matricielle, qui se place donc naturellement dans la leçon 156. L'essentiel du développement repose sur l'étude de l'image des polynômes de matrices par l'application exponentielle, ce qui justifie le placement de ce développement dans la leçon 153 par l'utilisation des propriétés topologiques liées à $\mathbb{C}[A]$*. Le principal outil de la preuve est la connexité de* $\mathbb{C}[A]^\times$*, qui permet de déduire l'égalité* $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$*. Cette preuve constitue donc une belle illustration de la leçon 204. Enfin, du fait de l'utilisation du théorème d'inversion locale pour montrer que* $\exp(\mathbb{C}[A])$ *est ouvert dans* $\mathbb{C}[A]^\times$*, ce développement trouve tout à fait sa place dans la leçon 214.*

Prérequis :

- le théorème d'inversion locale
- pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. [1]
- un sous espace vectoriel de dimension finie est fermé
- $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs
- connexe par arcs implique connexe

Introduction :

On voudrait étudier l'application exponentielle sur les matrices et notamment son image par les matrices réelles et complexes. Pour faire cela, on va donner un résultat plus général : on va caractériser l'image des polynômes en A par l'exponentielle.

Théorème 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$$

où $\mathbb{C}[A]^\times$ désigne les inversibles de l'anneau $\mathbb{C}[A]$.

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

Étape 1 : *Montrons que* $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$

$\boxed{\subset}$ On a $\mathbb{C}[A]^\times \subset \mathbb{C}[A]$ et pour tout $M \in \mathbb{C}[A]^\times$, il existe $N \in \mathbb{C}[A]$ telle que $MN = I_n$, donc M est inversible, i.e. $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. D'où

$$\mathbb{C}[A]^\times \subset \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

$\boxed{\supset}$ Soit $M \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on considère le polynôme caractéristique

$$\chi_M = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

1. il suffit de voir que $I_n = \exp(0) = \exp(A - A) = \exp(A)\exp(-A)$, donc $\exp(A)$ est inversible.

Comme $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on a $a_0 = \det(M) \neq 0$ et, par le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$M\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i M^{i-1}\Big) = -a_0 I_n$$

Donc $M \in \mathbb{C}[A]^\times$ car $\dfrac{-1}{a_0}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i M^{i-1}\Big) \in \mathbb{C}[A]$ puisque $M \in \mathbb{C}[A]$.

Étape 2 : *Montrons que* $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A]^\times$

Soit $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$, on a donc $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et il existe $N \in \mathbb{C}[A]$ tel que $M = \exp(N)$. Il faut donc prouver que $\exp(N)$ est un polynôme en A. L'ensemble $\mathbb{C}[A]$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie, donc $\mathbb{C}[A]$ est fermé. Or

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{n} \frac{N^i}{i!} \in \mathbb{C}[A] \text{ [2]}$$

Donc $\exp(N) \in \mathbb{C}[A]$.

Étape 3 : *Montrons que* $\mathbb{C}[A]^\times$ *est connexe*

On veut montrer que $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe par arcs. Soient M_1 et M_2 dans $\mathbb{C}[A]^\times$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$P(z) = \det(zM_1 + (1-z)M_2) \in \mathbb{C}$$

Il faut trouver un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ (avec $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$) continu tel que $P \circ \gamma$ reste dans $\mathbb{C}^*$. Or le polynôme P n'est pas nul ($P(0) \neq 0$) donc ne s'annule qu'un nombre fini de fois, notons Z cet ensemble. De plus $\mathbb{C}\backslash Z$ est connexe par arcs car on a enlevé qu'un nombre fini de points à $\mathbb{C}$. Donc il existe un chemin γ qui évite les points de Z. Ainsi il existe un chemin continu qui relie M_1 et M_2 dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Donc $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe par arcs et par conséquent connexe.

Étape 4 : *Montrons que* $\exp(\mathbb{C}[A])$ *est ouvert dans* $\mathbb{C}[A]^\times$

On va appliquer le Théorème d'Inversion Locale [3] à

$$\exp : \mathbb{C}[A] \to \mathbb{C}[A]$$

On a $\mathrm{d}_0 \exp = Id$ bijectif, donc il existe un voisinage $\mathcal{U}$ ouvert de 0 dans $\mathbb{C}[A]$ et un voisinage $\mathcal{V}$ ouvert de I_n dans $\mathbb{C}[A]$ (qui est en fait aussi dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ [4] donc dans $\mathbb{C}[A]^\times$) tels que exp soit un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$.

Soit $\exp(M) \in \exp(\mathbb{C}[A])$. On pose

$$\mathcal{V}_M = \{V \exp(M), V \in \mathcal{V}\}$$

On a $\exp(M) \in \mathcal{V}_M$ et on veut prouver que $\mathcal{V}_M$ est un ouvert contenu dans $\exp(\mathbb{C}[A])$. $\mathcal{V}_M$ est bien ouvert car $\mathcal{V}$ l'est et $\exp(M)$ est inversible. De plus, pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $V = \exp(U)$. D'où

$$V\exp(M) = \exp(U)\exp(M) = \exp(U+M) \in \exp(\mathbb{C}[A]) \text{ [5]}$$

Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]^\times$.

2. car $\mathbb{C}[A]$ est stable par produit et somme finie
3. Remarquons que $\mathbb{C}[A]$ est fermé et donc cela pourrait poser problème mais, en fait, on regarde $\mathbb{C}[A]$ muni de la topologie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}[A]$ est ouvert relativement à $\mathbb{C}[A]$
4. car l'exponentielle va dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$
5. U et M commutent car ce sont tous les deux des polynômes en A

Étape 5 : *Montrons que* $\exp(\mathbb{C}[A])$ *est fermé dans* $\mathbb{C}[A]^\times$

On veut montrer que $E = \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}(A))$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]^\times$. Montrons que :

$$E = \bigcup_{M \in E} M \exp(\mathbb{C}[A])$$

$\boxed{\subset}$ Soit $M \in E$, on a $M = M\exp(0) \in \bigcup_{M \in E} M\exp(\mathbb{C}[A])$.

$\boxed{\supset}$ Soit $M \in E$, $P \in \mathbb{C}[X]$. On pose

$$N = M\exp(P(A))$$

Donc

$$M = N\exp(-P(A))$$

Ainsi si $N \in \exp(\mathbb{C}[A])$, on aura aussi $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$ ce qui est exclu car $M \in E$. Ce qui entraine que $N \notin \exp(\mathbb{C}[A])$ donc $N \in E$.

Or, pour tout $M \in E$, on a $M\exp(\mathbb{C}[A])$ qui est un ouvert de $\mathbb{C}[A]^\times$ car M est inversible et $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert (étape 4). Ainsi E est ouvert dans $\mathbb{C}[A]^\times$ car c'est une réunion quelconque d'ensembles ouverts. Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé dans $\mathbb{C}[A]^\times$.

Étape 6 : *Conclusion*

L'ensemble $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{C}[A]^\times$ qui est connexe. Or $I_n = \exp(0) \in \exp(\mathbb{C}[A])$ donc $\exp(\mathbb{C}[A]) \neq \varnothing$. De ce fait

$$\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$$

Ce qui conclut la preuve.

□

Corollaire 1. On a :

$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on a donc $A \in \mathbb{C}[A]^\times$, donc par le théorème précédent, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$. On a donc bien un antécédent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. □

Corollaire 2. On a :

$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A^2, A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$$

Démonstration. Si $A \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, on a $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = \exp(B)$. On a alors

$$A = \exp\left(\frac{B}{2}\right)^2$$

avec $\exp\left(\frac{B}{2}\right) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Réciproquement, soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a donc $A \in \mathbb{C}[A]^\times$, donc par le théorème précédent, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$A = \exp(P(A))$$

P est complexe mais A est réelle, donc, en passant au conjugué, on a

$$A = \exp(\overline{P(A)}).$$

Ce qui nous donne

$$A^2 = \exp(P(A))\exp(\overline{P(A)}) = \exp(P(A) + \overline{P(A)})$$

Or $P + \overline{P}$ est à coefficients réels donc $(P + \overline{P})(A)$ est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc $(P + \overline{P})(A)$ est un antécédent de A pour l'exponentielle. □

Astuces de l'agrégatif :

— Les deux corollaires peuvent être regroupés en un seul.

— Il faut faire attention aux ensembles que l'on utilise pour appliquer le théorème d'inversion locale. Ce théorème s'applique pour une application d'un ouvert d'un Banach vers un espace de Banach. Ici, on utilise que $\mathbb{C}[A]$ est un ouvert de l'espace de Banach $\mathbb{C}[A]$.

— Quand on utilise le théorème d'inversion locale, il faut bien comprendre que $\mathrm{d}_0 \exp$ est l'identité des fonctions de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et non la matrice identité I_n.

Remarques :

— Plus généralement, le même théorème d'inversion locale permet de donner un difféomorphisme local entre un voisinage de l'identité dans un groupe $G \leqslant \mathcal{G}_n(\mathbb{C})$ et un voisinage de zéro dans l'algèbre de Lie associée, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Un argument de connexité similaire permet alors de déduire que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ détermine la composante connexe de l'identité de G.

— Par les mêmes arguments qu'à la question **a)**, on a aussi

$$\mathbb{R}[A]^\times = \mathbb{R}[A] \cap \mathcal{G}_n(\mathbb{R}).$$

Par contre, l'égalité $\exp(\mathbb{R}[A]) = \mathbb{R}[A]^\times$ est fausse. Par exemple, $-I_n \notin \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ puisque $\mathrm{Sp}(\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))) \subset]0, +\infty[$ alors que $-I_n \in \mathbb{R}[A]^\times$. On voit bien la particularité topologique de $\mathbb{C}$ dans la preuve : retirer un nombre fini de points de $\mathbb{C}$ conserve la connexité, ce qui n'est pas vrai dans $\mathbb{R}$. En effet, on peut relier deux déterminants dans $\mathbb{C}^*$, mais pas dans $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas connexe.

— On peut voir que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \neq \mathcal{G}_n(\mathbb{R})$, en utilisant le fait que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{G}_n^+(\mathbb{R})$. Cependant $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \neq \mathcal{G}_n^+(\mathbb{R})$ car, par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{G}_n^+(\mathbb{R})$ mais pas dans $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

— On a montré que l'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{G}_n(\mathbb{C})$ est surjective, mais elle n'est pas injective pour $n \geqslant 1$ et $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{G}_n(\mathbb{R})$ n'est pas injective pour $n \geqslant 2$. Par exemple, $\exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cependant $\exp : \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{G}_n(\mathbb{C})$ est injective, où $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

— Si on restreint l'exponentielle à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices antisymétriques, on a alors la surjectivité dans $SO_n(\mathbb{R})$.

— Si on restreint l'exponentielle à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques, on a alors la surjectivité dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives. Il y a même un homéomorphisme.

Questions possibles :

- Calculer la différentielle de exp en 0.
- Montrer que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{G}_n(\mathbb{C})$ n'est pas injective.
- Pourquoi un sous-espace vectoriel de dimension finie est-il fermé ?
- Si Z est fini, montrer que $\mathbb{C}\backslash Z$ est connexe par arcs.
- Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathcal{G}_n(\mathbb{C})$ et $M \in \mathcal{G}_n(\mathbb{C})$, montrer que $M\mathcal{U}$ est ouvert.
- Rappeler pourquoi, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutent, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
- Pourquoi $\overline{\exp(A)} = \exp(\overline{A})$?