Isométries du cube et du tétraèdre

Leçons : 101 ; 104 ; 105 ; 108 ; 183

Références : CALDERO–GERMONI, *Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries Tome 2* (p.221) [?]

Prérequis :

- définitions des isométries d'un objet X [**?**, p.218]
- la géométrie affine (repère, isométrie)
- une isométrie préserve les barycentres, donc préserve les points extrémaux (*i.e.* les sommets) d'un polygone.
- définition de $\mathrm{Isom}^+(X)$

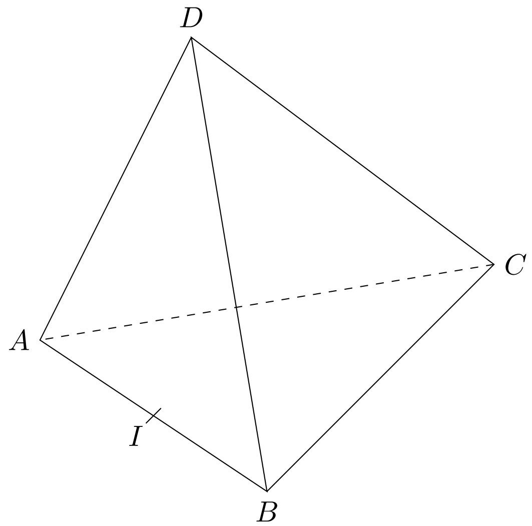
Introduction :

On va étudier les groupes des isométries et des isométries positives de 2 des 5 solides de Platon. On étudiera le tétraèdre et le cube. Cela nous permettra de mieux comprendre ces groupes car ils seront isomorphes à des groupes que l'on a l'habitude de manipuler. Ainsi, on pourra mieux comprendre les groupes symétriques et mieux comprendre le groupe des isométries en fonction de l'angle d'attaque que l'on se donne.

Théorème 1. Soit T un tétraèdre. On a alors

$$\mathrm{Isom}(T) \simeq \mathfrak{S}_4 \text{ et } \mathrm{Isom}^+(T) \simeq \mathfrak{A}_4$$

Démonstration. Commençons par dessiner le tétraèdre.



Les isométries préservent les sommets du tétraèdre car elles préservent les longueurs. Ainsi l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$ est stable par $\mathrm{Isom}(T)$. On peut donc faire agir $\mathrm{Isom}(T)$ sur S.

$$\varphi : \mathrm{Isom}(T) \to \mathfrak{S}_S \simeq \mathfrak{S}_4$$

On veut prouver que c'est un isomorphisme.

Étape 1 : *Montrons que φ est injective.*

Soit $f \in \ker(\varphi)$, f fixe les sommets du tétraèdre, donc en particulier f fixe le repère affine $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Ainsi f fixe tout l'espace, donc f est l'identité. On obtient alors que φ est injective.

Étape 2 : *Montrons que φ est surjective.*

$\mathfrak{S}_4$ est engendré par les transpositions. Montrons que l'on peut trouver, pour chaque transposition t, une isométrie f telle que $\varphi(f) = t$. Soit la transposition (AB) qui échange les sommets A et B et laisse fixe C et D. On peut prendre la reflexion par rapport au plan (ICD) qui est le plan médiateur de $[AB]$. Ainsi, on a bien trouvé une isométrie qui échange A et B en laissant fixe C et D. Donc on peut obtenir toutes les transpositions sur le même principe. Ainsi φ est surjective.

En conclusion,

$$\mathrm{Isom}(T) \simeq \mathfrak{S}_4.$$

Étape 3 : *Regardons Isom$^+(T)$.*

$\det \circ \varphi^{-1} : \mathfrak{S}_4 \to \mathbb{C}^*$ est un morphisme non trivial donc c'est le morphisme signature [1]. Donc $\det = \varepsilon \circ \varphi$. Or $\mathrm{Isom}^+(T) = \ker(\det) \simeq \ker(\varepsilon) = \mathfrak{A}_4$ car φ est un isomorphisme [2]. Ainsi,

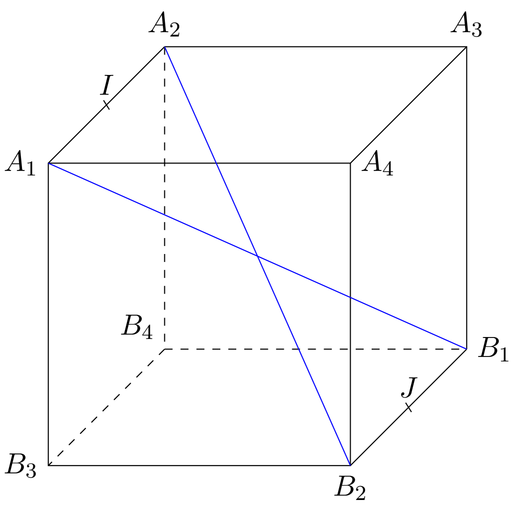
$$\mathrm{Isom}^+(T) \simeq \mathfrak{A}_4$$

□

Théorème 2. Soit C un cube. On a alors

$$\mathrm{Isom}(C) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ et } \mathrm{Isom}^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4$$

Démonstration. Commençons par dessiner le cube.



L'ensemble des 4 grandes diagonales D est stable par isométries du cube car les isométries préservent les longueurs (donc en particulier la plus grande longueur entre deux points du cube, c'est à dire les grandes diagonales). Ainsi on peut faire agir Isom(C) sur D par le morphisme suivant

$$\varphi : \mathrm{Isom}(C) \to \mathfrak{S}_D \simeq \mathfrak{S}_4$$

1. car il n'y a que deux morphismes de $\mathfrak{S}_n \to \mathbb{C}^*$ qui sont l'identité et la signature
2. on aurait pu dire aussi que $\mathrm{Isom}^+(T)$ est distingué d'indice 2 dans $\mathrm{Isom}(T)$ et que le seul groupe distingué d'indice 2 de $\mathfrak{S}_4$ est $\mathfrak{A}_4$

Étape 1 : *Étude du noyau de φ*

Soit $f \in \ker\varphi$. Par définition, f envoie chaque grande diagonale sur elle-même. Ainsi $f([A_1B_1]) = [A_1B_1]$, on a deux cas possibles :

— Si $f(A_1) = A_1$, on a donc $f(B_1) = B_1$ puis pour des questions de préservation des longueurs, f fixe tous les autres sommets du cube. Ainsi, f est l'identité que l'on notera Id.

— Si $f(A_1) = B_1$, on a donc $f(B_1) = A_1$ et de nouveau pour préserver les longueurs, il faut que f échange chaque sommet A_i avec B_i et vice versa pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Donc f est alors la symétrie centrale par rapport au centre du cube, on la notera $-Id$.

Ainsi $\ker\varphi = \{Id, -Id\}$.

Étape 2 : *Surjectivité de φ*

Comme pour le tétraèdre, on va prouver que l'on peut engendrer n'importe quelle transposition de $\mathfrak{S}_4$, et parce que les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_4$, on aura la surjectivité de φ.

En prenant la rotation d'angle π autour de l'axe qui passe par les milieux des arêtes qui joignent les sommets des grandes diagonales que l'on veut échanger, on va bien échanger les deux grandes diagonales que l'on veut échanger en laissant les deux autres fixes. Exemple en faisant la rotation de π autour de (IJ), on va échanger (A_1B_1) et (A_2B_2) en laissant fixe (A_3B_3) et (A_4B_4).

Donc φ est surjective.

Étape 3 : *Étude de $Isom^+(C)$*

Si on restreint φ aux $\mathrm{Isom}^+(C)$, on a un isomorphisme car $-Id$ est une isométrie indirecte donc $\ker(\varphi_{|\mathrm{Isom}^+(C)}) = \{Id\}$ et elle reste surjective car les rotations sont des isométries positives. Ainsi

$$\mathrm{Isom}^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4$$

Étape 4 : *Étude de $Isom(C)$*

On va utiliser le lemme suivant :

Lemme 1. Soit $N, H \lhd G$ tels que $|N||H| = |G|$ et $N \cap H = \{e\}$ où e est le neutre de G. Alors

$$G \simeq N \times H$$

Ici on prend $G = \mathrm{Isom}(C)$, $N = \mathrm{Isom}^+(C)$ distingué dans G car d'indice 2 et $H = \{Id, -Id\}$ distingué dans G car $\{Id, -Id\} \subset Z(G)$ le centre de G. On a bien $2|\mathrm{Isom}^+(C)| = |\mathrm{Isom}(C)|$ et $\mathrm{Isom}^+(C) \cap \{Id, -Id\} = \{Id\}$ car $-Id$ est une isométrie indirecte. Ainsi on a

$$\mathrm{Isom}(C) \simeq \mathrm{Isom}^+(C) \times \{Id, -Id\}$$

De plus, on a $\mathrm{Isom}^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\{Id, -Id\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, d'où le résultat voulu

$$\mathrm{Isom}(C) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

□

Remarques :

On pourra, grâce à cette étude, donner le nombre de coloriages différents d'un cube par exemple (57 pour 3 couleurs)

Astuces de l'agrégatif :

Attention, il faut bien maitriser la géométrie affine, notamment les histoires d'isométries affines et repère affine.

Démonstration du lemme. On pose l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} N \times H & \to & G \\ (n,h) & \mapsto & nh \end{array} \right.$$

Étape 1 : *Injectivité de φ*

Soient $n_1, n_2 \in N$, $h_1, h_2 \in H$ tels que $n_1 h_1 = n_2 h_2$. On veut prouver que $n_1 = n_2$ et $h_1 = h_2$.

$$n_1 h_1 = n_2 h_2 \iff \underbrace{n_2^{-1} n_1}_{\in N} = \underbrace{h_2 h_1^{-1}}_{\in H} \in N \cap H = \{e\}$$

D'où $n_2^{-1} n_1 = e \iff n_1 = n_2$ et $h_2 h_1^{-1} = e \iff h_1 = h_2$. Donc φ est bien injective.

Étape 2 : *Bijectivité de φ*

On utilise l'égalité des cardinaux entre $|N \times H| = |N||H| = |G|$ et l'injectivité de φ pour prouver que φ est bijective.

Étape 3 : *Montrons que φ est un morphisme*

On veut prouver que $n_1 h_1 n_2 h_2 = n_1 n_2 h_1 h_2$ pour avoir $\varphi(n_1, h_1)\varphi(n_2, h_2) = \varphi((n_1, h_1)(n_2, h_2))$. Ce qui est équivalent que de prouver que $h_1 n_2 = n_2 h_1$ et donc de prouver que $n_2^{-1} h_1 n_2 h_1^{-1} = e$. Or comme H est distingué dans G on a

$$\underbrace{n_2^{-1} h_1 n_2}_{\in H} h_1^{-1} \in H$$

et comme N est distingué dans G, on a

$$n_2^{-1} \underbrace{h_1 n_2 h_1^{-1}}_{\in N} \in N$$

Donc $n_2^{-1} h_1 n_2 h_1^{-1} = e$ puisque $N \cap H = \{e\}$.

Ainsi φ est bien un isomorphisme.

$\square$