Morphismes d'algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$

Leçons : 159 ; 203

Références : FRANCINOU–GIANELLA–NICOLAS, *Oraux X-ENS* (je n'ai pas trouvé dans lequel c'était fait, si tu trouves, dis le moi s'il te plait)

Prérequis :

- la définition d'un morphisme d'algèbre[1]
- la propriété de Borel-Lebesgue
- la définition d'un idéal propre[2]

Théorème 1. Soit K un espace métrique compact. Les morphismes d'algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ sont exactement les morphismes d'algèbre de la forme $f \mapsto f(s)$ pour $s \in K$ et l'application nulle.

Démonstration. Soit φ un morphisme d'algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ dans R non nul. On sait que $\ker(\varphi)$ est un idéal propre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ par le morphisme d'anneau φ et un hyperplan de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ en utilisant l'aspect linéaire du morphisme d'algèbre.

Lemme 1. L'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ nulles sur un hyperplan H forme une droite vectorielle du dual $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})^*$.

Démonstration du lemme. Soit S un supplémentaire de H et f_0 un élément non nul de S. On a alors

$$\mathcal{C}(K, \mathbb{R}) = H \oplus \mathbb{R} f_0$$

Soit ψ_0 une forme linéaire de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ nulle sur H telle que $\psi_0(f_0) \neq 0$. Pour tout ψ forme linéaire de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ nulle sur H, on pose

$$\lambda = \frac{\psi(f_0)}{\psi_0(f_0)}.$$

On considère la forme linéaire

$$\phi = \psi - \lambda \psi_0$$

Or ϕ est nulle sur H puisque ψ et ψ_0 le sont. De plus $\phi(f_0) = \psi(f_0) - \frac{\psi(f_0)}{\psi_0(f_0)} \psi_0(f_0) = 0$. Ainsi ϕ est nulle partout, ce qui implique $\psi = \lambda \psi_0$. Ainsi ψ appartient à la droite vectorielle portée par ψ_0.

Réciproquement, les éléments de $\mathbb{R}\psi_0$ sont des formes linéaires de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ nulles sur l'hyperplan H. □

Ainsi l'ensemble des formes linéaires nulles sur $\ker(\varphi)$ est $\mathbb{R}\varphi$ car φ est non nul.

Soit $s \in K$, on pose

$$I_s := \{f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}), f(s) = 0\}$$

On remarque que I_s est un idéal propre de $C(K, \mathbb{R})$.

$\Big($Pour tout $g \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ et tout $f \in I_s$, $fg(s) = f(s)g(s) = 0$ car $f(s) = 0$, d'où $fg \in I_s$, et la fonction identiquement égale à 1 qui est bien continue n'est pas dans I_s donc I_s est propre.$\Big)$

1. morphisme d'anneau et application linéaire d'une algèbre vers une autre algèbre
2. idéal d'un anneau A qui n'est pas A tout entier

On veut prouver que tout idéal propre J de $C(K,\mathbb{R})$ est inclus dans I_s pour un certain $s \in K$. Par l'absurde, on suppose que J n'est dans aucun I_s, il existe donc pour tout $s \in K$, un $f_s \in J$ tel que $f_s(s) \neq 0$.

Or les f_s sont continues donc il existe $r_s > 0$ tel que f_s soit non nulle sur $B(s, r_s)$. On utilise maintenant le caractère compact de K par la propriété de Borel Lebesgue.

$$K \subset \bigcup_{s \in K} B(s, r_s)$$

Donc il existe $s_1, \ldots, s_n$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(s_i, r_{s_i})$$

On a $f_{s_i} \in J$, donc $f_{s_i}^2 \in J$ et $f_{s_i}^2 > 0$ sur $B(s_i, r_{s_i})$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On considère la fonction

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_{s_i}^2 \in J$$

On a donc $f > 0$ sur K, ainsi $1 = \frac{1}{f}.f \in J$ par structure d'idéal. Donc $J = \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, ce qui est absurde puisque J est supposé propre.

Or $\ker(\varphi)$ est un idéal propre, donc il existe un $s \in K$ tel que $\ker(\varphi) \subset I_s$. Or la forme linéaire $\alpha_s : f \mapsto f(s)$ est nulle sur $\ker(\varphi)$, donc il existe λ tel que

$$\alpha_s = \lambda\varphi$$

Autrement dit,

$$\forall f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R}) \quad f(s) = \lambda\varphi(f)$$

Soit $f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ telle que $f(s) \neq 0$. On a

$$f(s)^2 = \alpha_s(f)^2 = \alpha_s(f^2) = \lambda\varphi(f^2) = \lambda(\varphi(f))^2$$

et

$$\lambda f(s)^2 = \lambda^2(\varphi(f))^2 = (\lambda\varphi(f))^2 = f(s)^2$$

Donc $\lambda = 1$, ainsi $\varphi = \alpha_s$, c'est-à-dire φ est de la forme $f \mapsto f(s)$.

Réciproquement, $f \mapsto f(s)$ et l'application nulle sont des morphismes d'algèbre de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$. □

Remarques :

Il faut bien faire attention aux objets que l'on manipule, il ne faut pas confondre les objets $f(s)$ et α_s.

Il faut savoir ce qu'est un morphisme d'algèbre (morphisme d'anneau et application linéaire d'une algèbre vers une autre algèbre), ici on a $(\mathcal{C}(K,\mathbb{R}), +, \times, .)$ et $(\mathbb{R}, +, \times, .)$ deux $\mathbb{R}$-algèbres. On a $(f \times g)(s) = f(s) \times g(s)$.