Méthode de Newton

Leçons : 219 ; 223 ; 226 ; 228 ; 229

Références : ROUVIÈRE, *Petit Guide de Calcul Différentiel* (p.152) [?]

Prérequis :

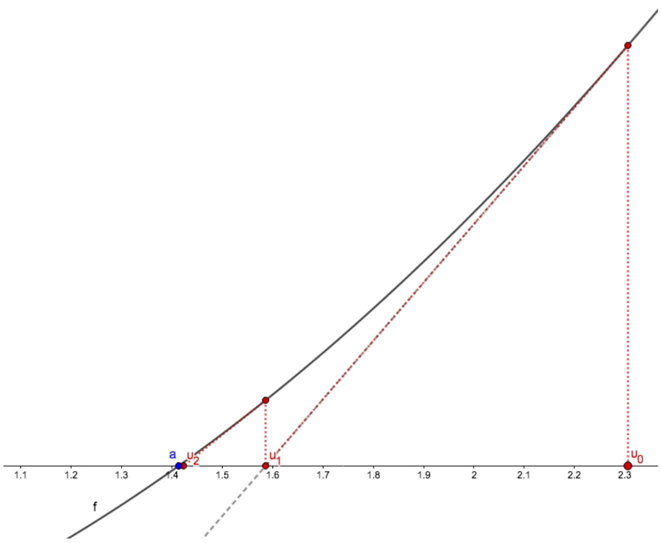
- la formule de Taylor–Lagrange
- une fonction f est convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$

Introduction :

Lorsque l'on étudie une fonction f, il est naturel de se demander quand est ce que cette fonction s'annule. Parfois, trouver les zéros explicites d'une fonction est extrêmement difficile voire impossible, on peut alors vouloir approcher des zéros de f. La méthode de Newton est pour cela un bon outil pour avoir une convergence relativement rapide vers un zéro de notre fonction, il faut évidemment se placer dans un bon cadre d'hypothèses pour assurer cette convergence. Dans ce développement, nous nous placerons dans deux cadres différents, un premier qui nécessite d'être assez proche du zéro à approcher et un deuxième qui nous permet de nous affranchir de cette contrainte mais en imposant des hypothèses plus fortes sur la fonction à étudier.

Théorème 1 (Méthode de Newton)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$, on suppose qu'il existe $a \in \overset{\circ}{I}$ tel que $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$.
Alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u_0 \in]a-\alpha, a+\alpha[$, la suite définie par $u_{n+1} = g(u_n) = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ converge vers a de manière quadratique.

Commençons par illustrer le théorème :



Approximation de $\sqrt{2}$ par la méthode de Newton sur $f(x) = x^2 - 2$ avec $u_0 = 2.3$.

Démonstration. Quitte à multiplier f par -1, on peut supposer que $f'(a) > 0$.

Ainsi comme f' est continue, il existe un $\alpha > 0$ tel que f' soit strictement positive sur $J :=]a - \alpha; a + \alpha[\subset I$.

Soit $x \in J$, $|g(x) - a| = \left| x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} - a \right| = \left| \dfrac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)} \right|$ car $f(a) = 0$.

On utilise Taylor–Lagrange pour avoir un élément $e \in]a, x[$ tel que

$$f(a) - f(x) - (a-x)f'(x) = \frac{1}{2}f''(e)(a-x)^2.$$

Ainsi on a $|g(x) - a| = \dfrac{|f''(e)|(a-x)^2}{2f'(x)} \leqslant C(x-a)^2$ où on définit C par $C := \dfrac{\sup_J |f''|}{2\inf_J |f'|}$, elle est bien définie car f' et f'' sont continues sur J et sur $\bar{J}$, $f' > 0$.

Quitte à réduire α, on peut supposer que $\alpha < \frac{1}{C}$.

Ainsi pour $x \in J$, $|g(x) - a| \leqslant C\alpha^2 < C\,\frac{1}{C}\alpha \leqslant \alpha$.

Donc pour $u_0 \in J$, la suite récurrente (u_n) est bien définie. Il faut prouver que (u_n) converge vers a de façon quadratique : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C|u_{n+1} - a| \leqslant C^2|u_n - a|^2 \leqslant C^4|u_{n-1} - a|^4 \leqslant \cdots \leqslant (C|u_0 - a|)^{(2^n)} \leqslant (C\alpha)^{(2^n)}.$$

Or $C\alpha < 1$ donc (u_n) converge vers a car $(C\alpha)^{2^n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et de manière quadratique car $|u_{n+1} - a| \leqslant C|u_n - a|^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. □

Théorème 2. Sous les hypothèses du théorème précédent, si on suppose, de plus, que f est convexe sur I et que $f'(a) > 0$, alors le résultat précédent est vrai pour tout $u_0 \in I \cap [a, +\infty[$.

Démonstration. Comme f est convexe, f' est croissante, donc puisque $f'(a) > 0$, on a f' positive à droite de a qui implique que f est positive à droite de a.

Soit d la borne supérieure de l'intervalle I. On veut prouver que :

$$a \leqslant g(x) \leqslant x \leqslant d \text{ pour tout } x \in [a, d].$$

Soit $x \in [a, d]$, on a

$$x - g(x) = x - x + \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{f(x)}{f'(x)} \geqslant 0$$

car f et f' sont positives à droite de a. D'où $g(x) \leqslant x$.

Soit $x \in [a, d]$,on a

$$g(x) - a = x - a - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{f''(e)}{2f'(x)}(x-a)^2 \geqslant 0$$

par Taylor–Lagrange sur l'intervalle $]a, x[$ et par convexité de f, on a f'' positive (et f' positive à droite de a). Donc $a \leqslant g(x)$.

Ainsi la suite (u_n), définie par récurrence pour $u_0 \in [a, d]$, est décroissante et minorée par a, donc converge vers un point fixe de g. Or les points fixes de g sont les zéros de f et le seul zéro de f sur $[a, d]$ est a. Donc (u_n) converge vers a.

Pour le caractère quadratique, on utilise la même preuve que dans le théorème précédent, car comme (u_n) converge vers a, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - a| < \alpha$ (α définie dans la preuve précédente). □

Remarques :

- La méthode de Newton marche en dimension supérieure, on pose alors $g(x) = x - Df(x)^{-1} \circ f(x)$.
- Il existe d'autres méthode pour trouver des zéros d'une fonction, comme la méthode de la sécante (mais qui ne marche pas en dimension supérieure) et la méthode de la dichotomie.
- On pose cette fonction g car c'est le point d'abscisse par lequel passe la tangente à la courbe de la fonction f au point x. En effet, la tangente au point x_0 a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Astuces de l'agrégatif :

Le théorème de Newton possède de nombreux énoncés. Pour éviter de faire des hypothèses sur a, on pourrait juste dire que la fonction f' est strictement positive sur un intervalle $[c, d]$ avec $f(c) < 0$ et $f(d) > 0$. Ainsi par le théorème des valeurs intermédiaires, il y a existence de a tel que $f(a) = 0$ et unicité par le caractère strictement croissant de f sur $[c, d]$.

Le fait de faire des hypothèses sur a n'est pas non plus aberrant. Par exemple, si on veut approcher un nombre algébrique avec la méthode de Newton (car elle converge vite), on connait les propriétés des zéros, donc on peut vérifier les hypothèses sur a et appliquer le théorème ci-dessous pour trouver les décimales de notre zéro.

Dans le livre de Dieudonné, *Calcul Infinitésimal*, il a un énoncé plus général de la méthode de Newton.

Questions possibles :

- Donner un équivalent de $x_{n+1} - a$.

  Réponse : $x_{n+1} - a \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$

- Donner un cas où la méthode de Newton ne converge pas.