Nombres de Bell

Leçons : 190 ; 230 ; 243

Références : FRANCINOU–GIANELLA–NICOLAS, *Oraux X-ENS Algèbre 1* (p.12)

Prérequis :

- notion de famille sommable[1]
- notion de série entière
- définition de l'exponentielle

Introduction :

On veut étudier le nombre de partitions différentes de $[\![1;n]\!]$ que l'on appellera B_n. Ce sont les nombres de Bell. On va étudier une série entière liée à ses nombres pour en déduire une expression explicite des B_n.

Théorème 1. Soit $n \geqslant 0$, on note B_n le nombre de partitions différentes de $[\![1;n]\!]$ (On prend $B_0 = 1$ par convention).

Alors on a :

— la relation de récurrence $B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$,

— le rayon de convergence R de $f(z) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{B_n}{n!} z^n$ est supérieur à 1,

— pour tout $z \in B(0,R)$, l'égalité $f(z) = \exp(e^z - 1)$

— pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_k = \displaystyle\frac{1}{e}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}\right)$

Démonstration. **Étape 1 :** *Montrons la relation de récurrence* $B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$

Soit $n \geqslant 0$. On veut dénombrer le nombre de partitions différentes de $[\![1;n+1]\!]$, pour cela on regarde la partie qui contient l'élément $n+1$. On note k le nombre d'éléments qui sont dans la même partie que $n+1$ ($n+1$ exclu), on a alors k entre 0 et n. Pour choisir ces k éléments, on a $\binom{n}{k}$ choix puisqu'il faut choisir k éléments parmi n. Il reste $n-k$ éléments qu'il faut partitionner. Par définition de B_n, on a donc B_{n-k} partitions différentes pour les $n-k$ éléments restants. On obtient donc la relation suivante :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

par changement d'indice et puisque $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

1. Une famille de complexe $(u_{n,k})$ indicée sur $\mathbb{N}^2$ est dite sommable si et seulement si

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n = \displaystyle\sum_k |u_{n,k}|$ converge

— la série de terme σ_n converge

Étape 2 : *Montrons que le rayon de convergence R est supérieur à 1*

On veut montrer que $B_n \leqslant n!$ pour avoir $\frac{B_n}{n!} \leqslant 1$ afin d'avoir un rayon de convergence R plus grand que 1 [2]. On va raisonner par récurrence.
Initialisation : pour $n = 0$, on a $B_0 = 1 = 0!$. Donc la propriété est vraie au rang 0.
Hérédité : on suppose que l'on a $B_k \leqslant k!$ pour tout $k \leqslant n$.

$$\begin{aligned}
B_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k! \\
&\leqslant n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \\
&\leqslant n! \sum_{k=0}^{n} 1 \text{ car } \frac{1}{(n-k)!} \leqslant 1 \\
&\leqslant (n+1)!
\end{aligned}$$

Conclusion : Donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, le rayon de convergence R de la série entière $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{B_n}{n!} z^n$ est supérieur à 1. [3]

Étape 3 : *Trouvons une expression pour f*

On peut donc écrire $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{B_n}{n!} z^n$ pour tout $z \in B(0, R)$.

On veut trouver une équation différentielle avec pour inconnue f. Pour tout $z \in B(0, R)$,

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{B_n}{n!} z^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(n-1)!} z^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \right)
\end{aligned}$$

2. car le rayon de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} z^n$ vaut 1

3. car $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{B_n}{n!} z^n \right| \leqslant |z|^n$

$$= e^z f(z)$$

On a donc l'équation différentielle

$$f' = e^z f$$

ce qui donne que $f(z) = C\exp(e^z)$ où C est une constante.
Or $f(0) = 1$, d'où $C = e^{-1}$. Autrement dit, $f(z) = \exp(e^z - 1)$ pour tout $z \in B(0, R)$.

Étape 4 : *Trouvons une expression explicite pour les coefficients B_n*
On veut exprimer f sous forme de série entière pour pouvoir identifier les coefficients. Pour faciliter les calculs on va regarder $\exp(e^z)$. On fixe $z \in B(0, R)$.

$$\begin{aligned}
\exp(e^z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!} \right) \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!n!}
\end{aligned}$$

On voudrait intervertir les deux signes $\sum$. Pour cela, on va montrer que la famille $u_{n,k} = \dfrac{(nz)^k}{k!n!}$ est sommable pour pouvoir utiliser Fubini.[4]

$$\forall n \geqslant 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n|z|)^k}{n!k!} = \frac{e^{n|z|}}{n!}$$

or $\dfrac{e^{n|z|}}{n!}$ est un terme de série convergente qui converge vers $\exp(e^{|z|})$.
Ainsi on peut intervertir les signes $\sum$. On a alors, pour tout $z \in B(0, R)$,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{e} \exp(e^z) \\
&= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!n!} \\
&= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{z^k}{k!}
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière sur $B(0, R)$, on a donc

$$\boxed{B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}}$$

$\square$

Remarques :
À la fin du développement, comme $\exp(e^z)$ est une somme de termes qui converge sur $\mathbb{C}$, on trouve que le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{B_n}{n!} z^n$ est en fait infini.

4. sachant qu'on travaille ici à z fixé

Astuces de l'agrégatif :

C'est facile de s'emmêler sur les indices n et k, un moyen pour se souvenir lequel utiliser c'est de se dire qu'au début, on étudie B_{n+1} donc on indice sur k puis ensuite on met tout le temps n pour la première somme. La seule exception est à la dernière étape, mais c'est normal de commencer par k puisque tout le but est d'inverser les deux sommations.