Translatés d'une fonction $\mathcal{C}^1$

Leçons : 151 ; 159 ; 221 ; 228

Références : FRANCINOU–GIANELLA–NICOLAS, *Oraux X-ENS Algèbre 1* (p.300)

Prérequis :

- les solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre p forment un espace vectoriel de dimension p.
- $(E^*)^\circ = \{0\}$

Introduction :

On sait que les solutions d'une équation différentielle linéaire forment un espace vectoriel de dimension finie. On va montrer une sorte de réciproque : si les translatés de f engendrent un espace de dimension finie, alors f est solution d'une équation différentielle linéaire.

Notations :

- on note $f_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x+a) \end{cases}$ les translatés de f (pour $a \in \mathbb{R}$).

Théorème 1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants si et seulement si les translatés de f engendrent un espace vectoriel de dimension finie.

Lemme 1. Soient $f_1, \dots, f_n$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a alors

$(f_1, \dots, f_n)$ libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $\iff$ il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que la matrice $(f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ soit inversible

Démonstration du lemme. $\boxed{\Longleftarrow}$ Par contraposée, si $f_1, \dots, f_n$ sont liées, alors, pour tous les $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, les colonnes de la matrice $(f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ sont liées. Ainsi la matrice ne sera pas inversible.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors $F = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n)$ de dimension n. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose la forme linéaire sur F suivante

$$e_a : \begin{cases} F & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(a) \end{cases}$$

L'ensemble $A = \{e_a, a \in \mathbb{R}\}$ est une partie génératrice de F^*.

En effet, si $f \in A^\circ$, on a $f(a) = e_a(f) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, donc f est la fonction nulle, ainsi $A^\circ = \{0\}$. On peut alors écrire

$$\mathrm{Vect}(A) = (\mathrm{Vect}(A)^\circ)^\perp = (A^\circ)^\perp = \{0\}^\perp = F^*$$

On peut donc choisir $x_1, \dots, x_n$ tels que $(e_{x_1}, \dots, e_{x_n})$ base de F^*. On pose ensuite la matrice $M = (f_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Montrons que les lignes $L_1, \dots, L_n$ de M forment une famille libre.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0$. On a alors

$$\forall j \in [\![1;n]\!], \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x_j) = 0$$

Autrement dit, $e_{x_j}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i\right) = 0$. Comme $(e_{x_j})_{1\leqslant j\leqslant n}$ est une base de F^*, on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \in (F^*)^\circ = \{0\},$$

ainsi

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$$

Or $(f_1, \dots, f_n)$ forment une base de F, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

La matrice M est donc inversible. □

Démonstration du théorème. $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit (E) l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants dont f est solution. On note p l'ordre de (E). Tous les translatés de f sont des solutions de (E) (car (E) est homogène). Or l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre p forme un espace vectoriel de dimension p. Ainsi l'ensemble des translatés de f engendre un espace vectoriel de dimension inférieure à p, donc de dimension finie.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On note F l'ensemble engendré par les translatés de f. Par hypothèse, F est de dimension finie, on note n sa dimension.

On considère $a_1, \dots, a_n$ tels que $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ soit une base de F. Par le lemme, il existe $x_1, \dots, x_n$ tels que $M = (f_{a_i}(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ soit inversible.

La fonction f étant $\mathcal{C}^1$, les fonctions f_{a_i} le sont aussi. Donc tout élément de F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $g \in F$. Montrons que $g' \in F$.

On a, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $g_a \in F$ car $g_a \in \mathrm{Vect}(f_{a_1+a}, \dots, f_{a_n+a}) \subset F$.

Il existe donc $\lambda_1(a), \dots, \lambda_n(a)$ tels que

$$g_a = \sum_{i=1}^n \lambda_i(a) f_{a_i}$$

On veut maintenant montrer que les λ_i sont dérivables.

On a, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$g(a + x_j) = g_a(x_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(a) f_{a_i}(x_j)$$

Autrement dit,

$$^tM \begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(a+x_1) \\ \vdots \\ g(a+x_n) \end{pmatrix}$$

D'où
$$\begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix} = {}^tM^{-1} \begin{pmatrix} g(a+x_1) \\ \vdots \\ g(a+x_n) \end{pmatrix} \quad \text{car } M \text{ est inversible donc } {}^tM \text{ aussi}$$

Comme ${}^tM^{-1}$ est indépendante de a, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, λ_j est combinaison des $g_{x_1}, \ldots, g_{x_n}$. Les λ_i sont donc des fonctions $\mathcal{C}^1$ comme les g_{x_i}. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x+a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a) f_{a_i}(x)$$

En dérivant par rapport à a, on a :

$$g'(x+a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(a) f_{a_i}(x)$$

On applique en $a = 0$,

$$g'(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(0) f_{a_i}(x)$$

Ainsi

$$g' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(0) f_{a_i} \in F$$

Donc tout élément de F est $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $g^{(k)} \in F$.

Ainsi, on peut appliquer ce résultat pour notre fonction f. Or l'espace vectoriel F étant de dimension finie n, il existe $p \in [\![1;n]\!]$ tel que

$$f^{(p)} \in \mathrm{Vect}(f, f', \ldots, f^{(p-1)})$$

La fonction f est donc solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficient constant d'ordre p. $\square$

Remarques :

En fait, on peut prendre une fonction f seulement continue et dérivable, car on montre que f' est dans l'espace F des translatés de f, donc $f \in \mathcal{C}^1$ gratuitement.

Astuces de l'agrégatif :

J'écris *EDO* pour équation différentielle ordinaire dans le développement.

Questions possibles :

- Pourquoi $(F^*)^\circ = \{0\}$?
- Pourquoi $\mathrm{Vect} A = \mathrm{Vect}(A^\circ)^\perp$ en dimension finie ?