# Nombres de zéros des solutions d'une équation différentielle

**Leçons : 220 ; 221 ; 224**

**Références : QUÉFFELEC–ZUILY, *Analyse pour l'agrégation* (p.404)**

**Prérequis :**

- le lemme de relèvement [?, p.305]

**Introduction :**

On veut étudier l'équation différentielle

$$y'' + qy = 0 \tag{E}$$

On suppose que

- $q \in \mathcal{C}^1([a; +\infty[, \mathbb{R}_+^*)$
- $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sqrt{q(u)}du = +\infty$
- $q'(x) = o\left(q^{3/2}(x)\right)$

Soit $y$ une solution non nulle de (??), on cherche à obtenir un équivalent à l'infini de

$$N : x \mapsto \text{Card}(\{u \in [a,x], y(u) = 0\})$$

**Théorème 1.**

$$N(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\int_a^x \sqrt{q(u)}du$$

**Lemme 1.** Soit $y_1, y_2$ deux fonctions $\mathcal{C}^1([a,+\infty[, \mathbb{R}_+)$ sans zéro commun.

Alors il existe $r, \theta : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classes $\mathcal{C}^1$ tels que $y_1(t) + iy_2(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ pour tout $t \in [a, +\infty[$ avec $r(t) > 0$.

*Démonstration du théorème.* **Étape 1 :** *Changement de variable*

On pose $\tau(x) = \displaystyle\int_a^x \sqrt{q(u)}du$.

La fonction $\tau$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ [1]. La fonction $\tau$ est même une bijection de $[a,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$. En effet,

$$\forall x \geqslant a, \quad \tau'(x) = \sqrt{q(x)} > 0, \quad \tau(a) = 0 \text{ et } \tau(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

On pose alors $Y = y \circ \tau^{-1}$. On a alors $\forall x > 0$,

$$y'(x) = Y'(\tau(x))\sqrt{q(x)} \text{ et } y''(x) = Y''(\tau(x))q(x) + Y'(\tau(x))\frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}$$

1. car $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue

En injectant ces expressions dans l'équation (??), on a

$$0 = y'' + qy = q(x)Y''(\tau(x)) + Y'(\tau(x))\frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}} + q(x)Y(\tau(x))$$

On pose maintenant $t = \tau(x)$ et $\varphi(t) = \dfrac{q'(x)}{2q^{3/2}(x)}$ [2] qui tend vers 0 quand $t$ tend vers l'infini par hypothèse.

En divisant par $q(x)$, on a donc $Y$ solution de

$$Y'' + \varphi Y' + Y = 0 \tag{$E'$}$$

**Étape 2 :** *Utilisation du lemme*

On veut montrer que $Y$ et $Y'$ n'ont pas de zero commun pour utiliser le lemme.

Par l'absurde, soit $t_0 \in [0, +\infty[$, telle que $Y(t_0) = Y'(t_0) = 0$. Alors le problème

$$\begin{cases} Y''(t) + \varphi(t)Y'(t) + Y(t) = 0 \\ Y'(t_0) = Y(t_0) = 0 \end{cases}$$

est un problème de Cauchy et par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a $Y(t) = 0$ pour tout $t \in [0, +\infty[$. Ainsi on aurait $y(u) = 0$ pour tout $u \in [a, +\infty[$, ce qui est absurde par hypothèse sur $y$.

Ainsi $Y$ et $Y'$ n'ont pas de zero commun. Donc par le lemme, il existe deux fonctions $r$ et $\theta$ telles que

$$Y = r\sin(\theta) \text{ et } Y' = r\cos(\theta)$$

**Étape 3 :** *Équivalent de $\theta(t)$*

On a le système [3]

$$Y' = r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta = r\cos\theta \tag{i}$$
$$Y'' = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta = -\varphi r\cos\theta - r\sin\theta \tag{ii}$$

On veut éliminer les $r'$, donc on multiplie (??) par $\cos\theta$ et (??) par $\sin\theta$, puis on fait la soustraction des deux expressions. On obtient alors

$$\cancel{r'\sin\theta\cos\theta} + r\theta'\cos^2\theta - \cancel{r'\sin\theta\cos\theta} + r\theta'\sin^2\theta = r\cos^2\theta + \varphi r\cos\theta\sin\theta + r\sin^2\theta$$

Ainsi, on trouve

$$r\theta' = r + \varphi r\sin\theta\cos\theta$$ [4]

Puis comme $r > 0$ pour tout $t$, on a

$$\theta' = 1 + \varphi\sin\theta\cos\theta$$

Donc

$$|\theta'(t) - 1| \leqslant |\varphi(t)| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \text{ par hypothèse sur } \varphi$$

D'où $\theta'(t) \underset{\infty}{\sim} 1$ puis $\theta(t) \underset{\infty}{\sim} t$ en intégrant.

Comme $\theta'(t)$ tend vers 1 quand $t$ tend vers $+\infty$, il existe $t_0$ telle que $\theta' > 0$ sur $[t_0, +\infty[$, ainsi $\theta$ est une bijection sur $[t_0, +\infty[$.

2. où $x = \tau^{-1}(t)$
3. pour trouver (??), on dérive l'expression $Y$ du lemme pour avoir $Y'$ qui est égale à l'expression $Y'$ du lemme, puis pour (??), on dérive l'expression $Y'$ du lemme pour avoir $Y''$ qui est égale à $-\varphi Y' - Y$ car $Y$ vérifie l'équation (??)
4. car $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

**Étape 4 :** *Étude asymptotique*

On pose l'ensemble

$$M(t) = \#\{u \in [0,t], \quad Y(u) = 0\}$$

Par l'absurde, on va montrer que $M(t_0) < +\infty$. Sinon l'ensemble des zéros de $Y$ dans $[0,t_0]$ aurait un point d'accumulation $u$. Soit $(u_n)$ une suite de zéros de $Y$ qui tend vers $u$. Alors $\dfrac{Y(u_n)-Y(u)}{u_n - u} \xrightarrow[n\to\infty]{} Y'(u)$. Or $Y(u_n) - Y(u) = 0$ pour tout $n$, donc $Y'(u) = 0$. Ainsi $Y(u) = Y'(u) = 0$ or c'est impossible comme on l'a prouvé au début de l'étape 2.

Ainsi $M(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \#\{u \in [t_0,t], \quad Y(u) = 0\}$ car $M(t_0) < +\infty$.

$$\begin{aligned}
M(t) &\underset{t\to\infty}{\sim} \#\{u \in [t_0,t], \quad Y(u) = 0\} \\
&\underset{t\to\infty}{\sim} \#\{u \in [t_0,t], \quad r(u)\sin(\theta(u)) = 0\} \\
&\underset{t\to\infty}{\sim} \#\{u \in [t_0,t], \quad \sin(\theta(u)) = 0\} \\
&\underset{t\to\infty}{\sim} \#\{v \in [\theta(t_0),\theta(t)], \quad \sin(v) = 0\} \\
&\underset{t\to\infty}{\sim} \#\{k \in \mathbb{Z}, \quad \theta(t_0) \leqslant k\pi \leqslant \theta(t)\} \\
&\underset{t\to\infty}{\sim} \frac{\theta(t)-\theta(t_0)}{\pi} \\
&\underset{t\to\infty}{\sim} \frac{\theta(t)}{\pi} \text{ car } \frac{\theta(t_0)}{\pi} \text{ est fini} \\
&\underset{t\to\infty}{\sim} \frac{t}{\pi} \text{ car } \theta(t) \sim t
\end{aligned}$$

Or on remarque que $N(x) = M(\tau(x))$ [5]. Donc

$$\begin{aligned}
N(x) &= M(\tau(x)) \\
&\underset{t\to\infty}{\sim} \frac{\tau(x)}{\pi} \\
&\underset{t\to\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\int_a^x \sqrt{q(u)}du
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve du théorème. □

**Remarques :**

Le changement de variable est là pour se rapprocher de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ que l'on sait bien résoudre. C'est pourquoi on demande à ce que la fonction $\varphi$ tende vers 0.

**Astuces de l'agrégatif :**

Je ne mettais pas tout le temps les variables mais il faut bien comprendre que $y, Y, q, \tau, \varphi, \theta, r$ sont des fonctions et $t, x, u$ sont des variables.

Je mettais le lemme dans le plan sans le réécrire au tableau. Je ne faisais pas la preuve du lemme pendant le développement par manque de temps. La preuve du théorème est suffisamment longue comme ça. Je mets ci-dessous la preuve du lemme de relèvement.

*Démonstration du lemme.* Comme $y_1$ et $y_2$ ne s'annulent pas en même temps, on peut écrire

$$r(t) = \sqrt{y_1(t)^2 + y_2(t)^2} > 0 \quad \text{et} \quad u(t) = \frac{y_1(t) + iy_2(t)}{r(t)}.$$

5. il suffit de se souvenir que $y(x) = Y(\tau(x))$

On a donc

$$r \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[,\mathbb{R}_+) \quad \text{et} \quad u \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[,\mathbb{S}^1)$$

où $\mathbb{S}^1$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$.

On veut maintenant trouver $\theta : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $u(t) = e^{i\theta(t)}$ pour tout $t \in [a,+\infty[$.

Analyse : On a $u'(t) = i\theta'(t)e^{i\theta(t)}$, d'où $\theta'(t) = -i\dfrac{u'(t)}{u(t)}$ existe bien car $u(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a,+\infty[$.

Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u(a) = e^{i\theta_0}$. On pose

$$\theta(t) = \theta_0 - i\int_a^t \frac{u'(\sigma)}{u(\sigma)}d\sigma.$$

Synthèse : $u \in \mathbb{S}^1$ donc $u\bar{u} = 1$. On dérive $u'(t)\bar{u}(t) + u(t)\bar{u}'(t) = 0$. D'où

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = -\frac{\bar{u}'(t)}{\bar{u}(t)}$$

Donc $\dfrac{u'(t)}{u(t)}$ est imaginaire pur.

Ainsi $\theta(t) \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in [0,+\infty[$.

De plus,

$$\begin{aligned}(ue^{-i\theta})' &= u'(t)e^{-i\theta(t)} - i\theta'(t)u(t)e^{-i\theta(t)} \\ &= \left(u'(t) - i \times -i\frac{u'(t)}{u(t)}u(t)\right)e^{-i\theta(t)} = 0\end{aligned}$$

Donc $ue^{-i\theta}$ est constante et $u(a) = e^{i\theta_0} = e^{i\theta(a)}$. D'où $u(t) = e^{i\theta(t)}$ pour tout $t \in [a,+\infty[$ avec $\theta$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Ainsi $y_1(t) + iy_2(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ pour tout $t \in [a,+\infty[$.

$\square$