Caractérisation de RE

Leçons : 912 ; 913 ; 914

Références : CORI–LASCAR, *Logique Mathématique, tome 2* (p.41)

Prérequis :

- équivalence entre Machine de Turing et fonction μ-récursive

Théorème 1. Soit $A \subset \mathbb{N}$, il y a équivalence entre les propositions suivantes :

(i) $A \in RE$

(ii) $A = \pi_2^2(B)$ pour $B \subset \mathbb{N}^2$ primitive récursive

(iii) $A = \varnothing$ ou A est l'image d'une fonction primitive récursive

(iv) A est l'image d'une fonction μ-récursive

Remarques :
On dit qu'un ensemble $E \subset \mathbb{N}$ est primitif récursif si sa fonction indicatrice est primitive récursive.

Démonstration. $\boxed{(i) \implies (ii)}$ Par définition il existe une machine de Turing M qui accepte A. On pose le prédicat :

$$P(t,x) = \text{“la machine } M \text{ accepte } x \text{ en } t \text{ étapes”}$$

Le prédicat P est primitif récursif car

$$P(t,x) = \mathbb{1}_F(\text{config}(\text{init}(x),t))$$

avec les fonctions définies dans le développement Machine de Turing $\implies$ μ-récursif.

On a supposé ici que la machine de Turing M boucle sur ces états finals.

On pose $B = \{(t,x), P(t,x)\}$, on a alors

$$\begin{aligned} x \in A &\iff \exists t, P(t,x) \\ &\iff \exists t, (t,x) \in B \\ &\iff x \in \pi_2^2(B) \end{aligned}$$

Ainsi on a bien $A = \pi_2^2(B)$.

$\boxed{(ii) \implies (iii)}$ Si $A \neq \varnothing$, il existe $n \in A$

Soit la bijection primitive récursive $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ définie par :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^2 \\ k & \mapsto & (t_k, x_k) \end{cases}$$

où $t_k = \text{diag}(k) - \text{ecart}(k)$ et $x_k = \text{ecart}(k)$ avec $\text{diag}(k) = \mu_i(i \leqslant k+1)(\frac{i(i+1)}{2} > k) - 1$ et $\text{ecart}(k) = k - \frac{\text{diag}(k)(\text{diag}(k)+1)}{2}$. φ est bien primitive récursive et bijective.

On note $B = (t_k, x_k)$ et on pose la fonction :

$$f(k) = (\pi_2^2 \circ \varphi(k))(\mathbb{1}_B \circ \varphi(k) + n(1 - \mathbb{1}_B \circ \varphi(k))$$

On a donc $x \in A \iff \exists t, (t,x) \in B \iff x \in \text{Im}(f)$

$\boxed{(iii) \implies (iv)}$ Si $A = \varnothing$, on a $A = \mathrm{Im}(\mu_i(\mathbb{O}(i)))$ avec $\mu_i(\mathbb{O}(i))$ une fonction μ-récursive. Si A est primitive récursive alors elle est aussi μ-récursive car toute fonction primitive récursive est μ-récursive (on ajoute seulement la minimisation non bornée).

$\boxed{(iv) \implies (i)}$ On a $A = \mathrm{Im}(f)$ avec f μ-récursive. Or f μ-récursive implique f calculable par une machine de Turing.

On peut donner l'algorithme suivant (entrée : x) :

```
k = 0
tant que f(k) ≠ x :
    k = k + 1
ACCEPTER
```

On peut implémenter cette machine de Turing (puisque f est calculable par une machine de Turing) et elle va accepter les éléments de A car ils seront l'image de f. Donc $A \in RE$. $\square$