TD 3 : Mesures, fonctions mesurables

Exercice 1 -

Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

1. Vérifier que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est une tribu.
2. On considère l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. On définit, pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (i.e. $A \subset \mathbb{N}$),

$$\begin{array}{lcll} \mu(A) & = & \mathrm{Card}(A), & \text{si } A \text{ est fini,} \\ \mu(A) & = & +\infty, & \text{si } A \text{ est infini.} \end{array}$$

   Montrer que μ est une mesure positive.

Exercice 2 -

Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par les parties $\{x\}$ où $x \in X$.

1. Montrer que $A \in \mathcal{A}$ si et seulement si A est dénombrable ou bien A^c est dénombrable.
2. Si X n'est pas dénombrable, on pose pour $A \in \mathcal{A}$:

$$\begin{array}{ll} \mu(A) = 0, & \text{si } A \text{ est dénombrable,} \\ \mu(A) = 1, & \text{si } A \text{ n'est pas dénombrable.} \end{array}$$

   Montrer que μ est une mesure positive définie sur $\mathcal{A}$.

Exercice 3 -

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

1. On suppose que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion, et on pose $A = \cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Montrer que
$$\mu(A) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k).$$
2. On suppose que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion, et que $\mu(A_0)$ est fini, et on pose $A = \cap_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Montrer que
$$\mu(A) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k).$$
3. Montrer par un contre-exemple que le résultat précédent est faux si on omet l'hypothèse $\mu(A_0) < +\infty$. (On pourra chercher un exemple d'une suite décroissante d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout n, A_n est infini et $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.)

Exercice 4 -

Soit $0 < \varepsilon < 1$. Construire un ouvert dense de $\mathbb{R}$ de mesure inférieure à ε.

Exercice 5 -

On définit une suite de fermés $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante : $K_0 = [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble K_{n+1} est obtenu en enlevant à chaque intervalle de K_n son tiers médian (on appelle tiers médian d'un intervalle I le sous-intervalle ouvert centré au centre de I, ayant pour longueur le tiers de celle de I). Enfin, on pose

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n.$$

1. Démontrer par récurrence que K_n est la réunion de 2^n intervalles fermés, deux à deux disjoints, de longueur 3^{-n} ayant pour extrémités les 2^{n+1} points de la forme
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3^k} + \frac{\varepsilon_n}{3^n} \text{ avec } x_k \in \{0,2\} \text{ et } \varepsilon_n \in \{0,1\}.$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la mesure de Lebesgue de K_n.
3. Quelle est la mesure de K ?
4. Le but de cette question est de montrer que K n'est pas dénombrable.
   - Montrer que
   $$\widetilde{K} := \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{3^k},\ x_k \in \{0,2\} \right\} \subset K.$$
   - En déduire que $\widetilde{K}$ est équipotent à $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$. Conclure.

Definition 1. Soient $(X, \mathcal{A}_X)$ et $(Y, \mathcal{A}_Y)$ deux espaces mesurables. Soit f une application de X dans Y. On dit que f est *mesurable* si et seulement si,
$$\forall A \in \mathcal{A}_Y,\ f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_X.$$

Exercice 6 -

Prouver que les fonctions suivantes sont mesurables (boréliennes) :

1. La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$.
2. La fonction $x \mapsto x + 1$ si $x > 0$ et $-x$ si $x \leq 0$.

Exercice 7 -

Quelles sont les fonctions $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables pour $\mathcal{A} = \big\{\emptyset, X\big\}$, puis pour $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$?

Exercice 8 -

1. Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et f, g des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que les ensembles suivants sont mesurables (*i.e.* les ensembles sont dans la tribu $\mathcal{A}$) :
$$A = \{x \in X\ ;\ f(x) \leq g(x)\}, \quad B = \{x \in X\ ;\ f(x) < g(x)\}, \quad C = \{x \in X\ ;\ f(x) = g(x)\}.$$
2. Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et (f_n) une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que les ensembles suivants sont mesurables :
$$A = \{x \in X,\ \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = +\infty\}, \quad B = \{x \in X,\ \text{la suite } (f_n(x))_n \text{ est bornée}\}.$$

Exercice 9 -

Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et f, g deux fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f + g$ et fg sont encore des fonctions mesurables.

Exercice 10 -

Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ et $\limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ sont mesurables.

2. Montrer que si (f_n) converge simplement vers une fonction f, alors f est encore une fonction mesurable.

Exercice 11 -

Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$. Montrer que l'ensemble

$$\{x \in X, (f_n(x))_{n\in N} \text{ converge}\},$$

est un élément de la tribu de X.

Exercice 12 -

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Montrer que si f est monotone, alors f est mesurable.

Exercice 13 -

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

1. Soit $A \subset X$. Montrer que la fonction indicatrice 1_A est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.
2. Soit $(A_n)_{n\in I}$ une partition de X où $X \subset \mathbb{N}$ et $f : (X, \sigma(\{A_n, n \in I\})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Montrer que f est constante sur chaque A_n.
3. L'inverse d'une bijection mesurable est-elle toujours mesurable ? *Indication* : On pourra commencer par montrer que la famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ définie par

$$(A \in \mathcal{A}) \Leftrightarrow \big(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (2n \in A) \Leftrightarrow (2n+1 \in A)\big)$$

   est une tribu sur $\mathbb{Z}$. Puis, on montrera que l'application $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n + 2$ est une bijection mesurable de $(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ vers $(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ mais que son inverse ne l'est pas.

Exercice 14 - Théorème de récurrence de Poincaré

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(\Omega) < +\infty$. Soit $T : \Omega \to \Omega$ une application mesurable. On définit pour tout $A \in \mathcal{B}, \nu(A) = \mu(T^{-1}(A))$.

1. Montrer que ν est une mesure.
2. On suppose dans toute la suite que $\nu := \mu$. Autrement dit, T préserve la mesure μ. Pour $A \in \mathcal{B}$, et $p \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$F = \{x \in A\ ;\ \forall n \geq p,\ T^n(x) \notin A\},$$

   où $T^n = T \circ \cdots \circ T$ est la n-ième itérée de T.

   - Montrer que les ensembles $(T^{kp})^{-1}(F)$, $k \geq 0$ sont deux à deux disjoints. Pour $k < k'$, on pourra écrire $T^{k'p} = T^{(k'-k)p} \circ T^{kp}$.
   - Montrer qu'on a $\mu(F) = 0$.
3. Soit $A \in \mathcal{B}$ vérfiant $\mu(A) > 0$. Montrer qu'il existe un point $x \in A$ tel que $T^n(x) \in A$ pour une infinité d'entiers n.