TD 3 : Mesures, fonctions mesurables

Exercice 2 -

Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par les parties $\{x\}$ où $x \in X$.

1. Montrer que $A \in \mathcal{A}$ si et seulement si A est dénombrable ou bien A^c est dénombrable.
2. Si X n'est pas dénombrable, on pose pour $A \in \mathcal{A}$:

$$\begin{array}{ll} \mu(A) = 0, & \text{si } A \text{ est dénombrable,} \\ \mu(A) = 1, & \text{si } A \text{ n'est pas dénombrable.} \end{array}$$

Montrer que μ est une mesure positive définie sur $\mathcal{A}$.

Solution de la question 1 :

1. On veut montrer que

$$\sigma(\{\{x\}, x \in X\}) = \underbrace{\left\{A \in \mathcal{P}(X), A \text{ dénombrable ou } A^{\complement} \text{ dénombrable}\right\}}_{\text{on note cet ensemble } \mathcal{B}}$$

$\boxed{\subset}$ On va utiliser la propriété qui nous dit que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est une tribu, alors $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{T}$.
Montrons que $\mathcal{B}$ est une tribu.

- $\emptyset \in \mathcal{B}$ car l'ensemble vide est dénombrable.
- Soit $B \in \mathcal{B}$, on a donc B dénombrable ou $B^{\complement}$ dénombrable, ainsi $B^{\complement} \in \mathcal{B}$ (puisque $B^{\complement^{\complement}} = B$).
- Soit $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$. Distinguons deux cas :
  → Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, B_k est dénombrable, alors $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$ est dénombrable et donc

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \in \mathcal{B}.$$

  → S'il existe un k_0 tel que B_{k_0} n'est pas dénombrable, alors $B_{k_0}^{\complement}$ est dénombrable (car $B_{k_0} \in \mathcal{B}$). Ainsi, comme $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k^{\complement} \subset B_{k_0}^{\complement}$, on a $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k^{\complement}$ qui est dénombrable. On a donc

$$\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right)^{\complement} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k^{\complement} \text{ dénombrable}$$

  Ainsi,

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \in \mathcal{B}.$$

Donc $\mathcal{B}$ est bien une tribu.

Montrons que $\{\{x\}, x \in X\} \subset \mathcal{B}$.
Soit $x \in X$, on a $\{x\}$ dénombrable donc $\{x\} \in \mathcal{B}$. Ainsi,

$$\{\{x\}, x \in X\} \subset \mathcal{B}$$

Ainsi, par la propriété énoncée au début de cette inclusion, on a le résultat voulu.

$\boxed{\supset}$ Soit $A \in \mathcal{B}$. Distinguons deux cas :

→ Si A est dénombrable, alors on a

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \in \sigma(\{\{x\}, x \in X\}).$$

→ Si $A^{\complement}$ est dénombrable, alors on a

$$A = A^{\complement^{\complement}} = \left(\bigcup_{x \in A^{\complement}} \{x\} \right)^{\complement} \in \sigma(\{\{x\}, x \in X\}).$$

Pour les deux dernières inclusions, on a utilisé la définition de tribu (stabilité par union dénombrable et stabilité par complémentaire).

Ainsi, on a bien

$$\mathcal{B} \subset \sigma(\{\{x\}, x \in X\}).$$