TD 5 : Intégration, permutation limite intégrale

Exercice 1 - Interversion limites/intégrales

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(\sin x)^n}{\sqrt{x}} dx$
2. $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1} dx$
3. $w_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{n\sqrt{x} + 1}{nx + 1} dx$
4. $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n + k}{k^{3/2} + nk^3}$
5. $y_n = n \displaystyle\int_0^1 \log(1 + n(1 - x))\, dx.$

Exercice 2 - Sommation terme à terme

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré.

1. Montrer que si (f_n) est une suite de fonctions mesurables et $\sum(\int_X |f_n| d\mu) < \infty$, alors les f_n, $\sum |f_n|$ et $\sum f_n$ sont intégrables et on a :
$$\int_X \left(\sum_{n\geq 1} f_n\right) d\mu = \sum_{n\geq 1} \left(\int_X f_n d\mu\right).$$
2. En utilisant les fonctions $x \mapsto x^{2n}(1 - x)$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ sur $[0, 1]$, déterminer la valeur de la somme
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)(2n + 2)}.$$

Exercice 3 - Inégalité stricte dans le lemme de Fatou

Donner un exemple de suite de fonctions mesurables positives où l'inégalité dans le lemme de Fatou est stricte.

Exercice 4 -

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que la mesure μ est finie, *i.e.* $\mu(X) < +\infty$. Soit $f : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable, et pour $n \geq 1$, on pose
$$I_n = \int_X \frac{f(x)^n}{1 + f(x)^n} d\mu(x).$$
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 5 -

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction λ-intégrable. Déterminer la limite suivante :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \exp(-n \sin(x)^2) f(x) dx.$$

Exercice 6 -

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables qui converge vers une limite f en norme L^1, *i.e.*
$$\int_X |f_n - f| d\mu \to 0.$$
Montrer qu'il existe une sous suite (f_{n_k}) qui converge presque partout vers f.

2. Soit (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable telle que
$$\int_X |1_{A_n} - f| d\mu \to 0.$$
Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $f = 1_A$, μ presque partout.

Exercice 7 -

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

1. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_X |f| 1_{|f|>n} d\mu = 0$.
2. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \varepsilon$.