Année 2018/2019

Métaplans d'Analyse pour l'Agrégation

Pierre Le Barbenchon

ENS Rennes

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

PLANS DE LEÇONS

1.1 Conseils

- C'est vous qui choisissez le niveau de votre leçon
- Ne mettre que des choses que l'on maitrise !
- Ce n'est pas obligatoire de remplir les 3 pages
- Il vaut mieux avoir moins de pages mais que des choses que l'on maitrise
- Je vous présente ici mes plans, ils sont loin d'être parfait
- Il ne sont d'ailleurs là que pour vous aider et vous guider, il faut que vous vous appropriiez des leçons [1]
- Personnalisez vos plans, car c'est finalement très personnel et c'est que comme ça que vous ferez un travail en profondeur !

ATTENTION : Ici, je mets le squelette de mes plans, ils sont volontairement très légers [2], c'est juste pour aider, donner les grandes parties et l'articulation des idées. En aucun cas, il ne faut les utiliser tel quel. Il ne reste plus qu'à les travailler ! [3]

1. tiens, ça fait deux “i” collés, c'est rigolo
2. certains plus que d'autres, en fonction du temps de travail dessus
3. Autrement dit tout faire

1.2 Métaplans d'analyse

Leçon 203
Utilisation de la notion de compacité.

Rapport du jury :

Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité en général et d'éviter la confusion entre *utilisation de la notion compacité* et *notion de compacité*. Le jury recommande vivement de rester en priorité dans le cadre métrique. Néanmoins, on attend des candidats d'avoir une vision synthétique de la compacité. Des exemples d'applications comme le théorème de HEINE et le théorème de ROLLE doivent y figurer et leur démonstration être connue. Par ailleurs, le candidat doit savoir quand la boule unité d'un espace vectoriel normé est compacte. Des exemples significatifs d'utilisation comme le théorème de STONE-WEIERSTRASS (version qui utilise la compacité), des théorèmes de point fixe, voire l'étude qualitative d'équations différentielles, sont tout à fait envisageables. Le rôle de la compacité pour des problèmes d'existence d'extrema mériterait d'être davantage étudié. On peut penser ensuite à des exemples en dimension $n \geqslant 2$.

Pour aller plus loin, les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. Les opérateurs auto-adjoints compacts sur un espace de HILBERT relèvent également de cette leçon, et on pourra développer l'analyse de leurs propriétés spectrales.

Questions possibles :

- Pour f est continue sur un compact, montrer qu'elle est bornée et qu'elle atteint ses bornes.
- Si f est coercive, est-elle minorée ?
- Comment on montre que les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés ?
- Montrer que f est continue en a SSI $\forall x_n \to a$, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$.
- Montrer que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue et telle que
$$\int_0^1 f(x)x^k dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
Alors f est identiquement nulle.
Réponse : Utiliser la convergence uniforme de polynômes vers f sur $[0,1]$
- Quelle est la limite uniforme d'une suite de polynômes sur $\mathbb{R}$?
Réponse : C'est un polynome

Motivations :

La notion de compacité est une notion utile pour étudier des ensembles infinis avec des outils finis. En effet, de n'importe quel sous recouvrement quelconque de notre ensemble, on peut extraire un sous recouvrement **fini** de notre ensemble. Cela aura un rôle important dans l'étude des fonctions. Ainsi une fois avoir étudié les propriétés générales avec la définition de Borel–Lebesgue et de Bolzano–Weierstrass qui sont équivalentes dans le cadre métrique, on va étudier ce que la compacité apporte aux fonctions continues (*Heine* : uniforme continuité d'une fonction continue sur un compact, etc.), puis ce que l'on peut dire des espaces de fonctions continues sur un compact (Par exemple, on sait que les fonctions continues bornées vers un Banach forment un espace complet pour la norme uniforme, comme les fonctions continues sur un compact sont bornées, on a donc la complétude des fonctions continues sur un compact).

Je me place dans un cadre métrique

Plan détaillé :

I - Généralité et cadre
  1) Borel–Lebesgue
    Définition
    $\boxed{\text{Morphismes d'algèbre de } \mathcal{C}(K, \mathbb{R}) \text{ sur } \mathbb{R}}$
  2) Bolzano–Weierstraß
    Définition
    Compacts de $\mathbb{R}$ pour $|.|$
    Compacts de $\mathbb{R}^n$ pour $\|.\|_\infty$
  3) Propriétés
    Théorème de Tychonoff fini et dénombrable
    Théorème de Riesz

II - Fonction continue sur un compact
  1) Uniforme continuité
    Théorème de Heine
    Théorème de Dini
  2) Extrema
    Théorème de Rolle
  3) Point fixe
    Théorème variante du point fixe de Picard avec $|f(x) - f(y)| < |x - y|$

III - Espace de fonctions continues sur un compact
  1) Complétude
    Théorème de complétude de $(\mathcal{C}(K, F), \|.\|_\infty)$ pour F complet
    Rappel : Point fixe de Picard
    $\boxed{\text{Cauchy Lipschitz et lemme de Gronwall}}$
  2) Relative Compacité
    Définition
    Théorème d'Ascoli
    Cauchy Peano
    Injection des Sobolev
  3) Convergence uniforme
    Approximation uniforme par des Polynomes
    Théorème de Stone Weierstraß

Développements :

- Morphismes d'algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$
- Cauchy Lipschitz et lemme de Gronwall

Références :

♥♥♥ - [13] Xavier GOURDON, *Analyse*
♥♥♥ - [23] Hervé QUEFFELEC, *Topologie*
♥♥♥♥ - [25] Edmond RAMIS, Claude DESCHAMPS et Jacques ODOUX, *Cours de Mathématiques 3 : Topologie et éléments d'analyse*

Leçon 208

Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Rapport du jury :

Le jury rappelle qu'une telle leçon doit contenir beaucoup d'illustrations et d'exemples, notamment avec quelques calculs élémentaires de normes subordonnées (notion qui met en difficulté un trop grand nombre de candidats). Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu (et éventuellement illustré, sans que cela puisse être mis au cœur de la leçon, de considérations d'analyse numérique matricielle). Lors du choix de ces exemples, le candidat veillera à ne pas mentionner des exemples pour lesquels il n'a aucune idée de leur pertinence et à ne pas se lancer dans des développements trop sophistiqués.

La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être maîtrisée. Il faut savoir énoncer le théorème de Riesz sur la compacité de la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé. Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux. Des exemples d'espaces vectoriels normés de dimension infinie ont leur place dans cette leçon et il faut connaître quelques exemples de normes usuelles non équivalentes, notamment sur des espaces de suites ou des espaces de fonctions et également d'applications linéaires qui ne sont pas continues. On peut aussi illustrer le théorème de Riesz sur des exemples simples dans le cas des espaces classiques de dimension infinie.

Les espaces de Hilbert ont également leur place dans cette leçon, mais le jury met en garde contre l'écueil de trop s'éloigner du cœur du sujet.

Questions possibles :

- Comment on prouve l'équivalence des normes en dimension finie ?
- Qu'en est-il de l'exemple de l'appendice ?
- Comment on prouve le théorème de Riesz ?
- Donner des normes non équivalentes et montrer qu'elles ne le sont pas

  Réponse : Les normes $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- Donner un schéma de preuve pour le théorème de Banach-Steinhaus.

Motivations :

L'étude des espaces normés est très riche et permet d'obtenir beaucoup de résultats. Tout d'abord, elle se justifie par le fait que nous vivons dans un espace vectoriel normé. Une norme est plus adaptée dans ce cadre que la distance. Elle permet notamment d'avoir des théorèmes tels que le théorème de Riesz qui donne une caractérisation des espaces vectoriels normés de dimension finie.On peut aussi parler de complétude et introduire les espaces de Banach. De plus, la structure d'espace vectoriel permet de parler d'applications linéaires qui permettent d'étudier des objets localement (à l'ordre 1) comme par exemple approcher des équations différentielles par son linéarisé ou juste de parler de différentielles qui sont des applications linéaires continues. La linéarité permet de prouver la continuité d'une application en étudiant la continuité en un seul point (par exemple 0).

Plan détaillé :

- I - Espace Vectoriel Normé
  - 1) Normes
    - Normes
    - Continuité
    - Équivalence des normes en dimension finie
    - Il existe des normes non équivalentes en dimension infinie
  - 2) Application linéaire
    - Définition des applications linéaires
    - EVN avec la norme d'opérateur
    - Norme sous multiplicative
  - 3) Dimension finie
    - Prop : les application linéaires sont continues
    - Prop : les compacts sont exactement les fermés bornés
    - Théorème de Riesz
- II - Espace de Banach
  - 1) Définitions et propriétés
    - Théorème de Riesz–Fisher pour la complétude des L^p
    - $(\mathcal{C}_b(E,F), \|.\|_\infty)$ complet si F est complet
    - Théorème de Point Fixe de Picard
    - Cauchy Lipschitz et lemme de Gronwall
  - 2) Théorème de Baire et applications
    - Théorème de Baire
    - Banach–Steinhaus
    - Théorème de l'application ouverte
    - Théorème d'isomorphisme de Banach
- III - Espace de Hilbert [17]
  - 1) Définition
    - Cauchy–Schwarz
    - Prop : le produit scalaire fournit une norme
    - Définition Hilbert
  - 2) Projection sur un convexe fermé
    - Théorème de projection
    - Corollaire : supplémentaire orthogonal
    - Corollaire : théorème de densité
    - Corollaire : théorème de représentation de Riesz

Développements :

- Cauchy Lipschitz et lemme de Gronwall
- Banach–Steinhaus

Références :

♥♥♥♥ - [13] Xavier GOURDON, *Analyse*

♥♥♥ - [16] Bertrand HAUCHECORNE, *Les contre-exemples en Mathématiques*

♥♥♥♥ - [27] François ROUVIÈRE, *Petit Guide de Calcul Différentiel*

♥♥♥ - [17] Francis HIRSCH et Gilles LACOMBE, *Éléments d'analyse fonctionnelle*

Leçon 214

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Rapport du jury :

Il s'agit d'une leçon qui exige une bonne maîtrise du calcul différentiel. Même si le candidat ne propose pas ces thèmes en développement, on est en droit d'attendre de lui des idées de démonstration des deux théorèmes fondamentaux qui donnent son intitulé à la leçon. Il est indispensable de savoir mettre en pratique le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles. On attend des applications en géométrie différentielle notamment dans la formalisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. En ce qui concerne la preuve du théorème des extrema liés, la présentation de la preuve par raisonnement "sous-matriciel" est souvent obscure ; on privilégiera si possible une présentation géométrique s'appuyant sur l'espace tangent. Plusieurs inégalités classiques de l'analyse peuvent se démontrer avec ce point de vue : arithmético-géométrique, Hölder, Carleman, Hadamard,...

Pour aller plus loin, l'introduction des sous-variétés est naturelle dans cette leçon. Il s'agit aussi d'agrémenter cette leçon d'exemples et d'applications en géométrie, sur les courbes et les surfaces.

Questions possibles :

- Expliciter le lien entre le théorème des fonctions implicites et le théorème de Cauchy-Lipschitz.
- Calculer la différentielle en tout point de l'application déterminant $det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

  Réponse : Indications : On commence par calculer la différentielle de cette application en I_n. On la calcule ensuite en tout point $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Enfin, on étend la formule à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tout entier, par densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et continuité de l'application det (qui est polynomiale en les composantes).

Motivations :

On voudrait étendre l'inversion de fonctions pour des fonctions à plusieurs varaibles. Quand $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$, on peut inverser localement dès que la dérivée est non nulle. On va donc avoir un résultat similaire en ayant la jacobienne qui est inversible, c'est ce qu'on appelle le théorème d'inversion locale. Un théorème qui en découle est le théorème des fonctions implicites, qui permet de représenter localement une courbe par le graphe d'une fonction (sous certaines hypothèses). Une autre application de l'inversion locale est l'équivalence entre les définitions des sous variétés. C'est pour cela qu'on parlera de sous variétés et du théorème des extrema liés dans cette leçon. D'autant plus qu'on peut prouver le théorème des extrema liés seulement avec le théorème d'inversion locale, cependant le rapport du jury nous rappelle qu'il préfère la preuve géométrique avec les sous-variétés.

J'ai rédigé le plan de cette leçon (voir ici)

Je me place dans le cadre de $\mathbb{R}^p$

I - Théorème d'Inversion Locale

1) Théorème d'Inversion Locale

Version locale

Version globale

Version holomorphe

2) Application en analyse

Changement de coordonnées

fonctions classiques : exp, det, l'inverse, ...

perturbation de l'identité

3) Application en géométrie et en algèbre

Théorème de D'Alembert Gauss

Formes quadratiques

Lemme de Morse

Image de l'exponentielle

II - Théorème des Fonctions Implicites

1) Théorème des Fonctions Implicites

Théorème

Lien avec Cauchy–Lipschitz, Théorème de Point Fixe de Picard et TIL [27]

2) Application

Solution approchée de racines de polynomes

Développement asymptotique d'une intégrale (exercice du [27])

III - Sous-variétés

1) Définitions

Sous-variétés

Plan tangent

2) Extrema liés

Théorème des extrema liés

Inégalité arithmético-géométrique

Inégalité de Hölder

Développements :

- Image de l'exponentielle
- Théorème des extrema liés

Références :

♥♥♥♥♥ - [27] François ROUVIÈRE, *Petit Guide de Calcul Différentiel*

Leçon 219

Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Rapport du jury :

Comme souvent en analyse, il est tout à fait opportun d'illustrer dans cette leçon un exemple ou un raisonnement à l'aide d'un dessin. Il faut savoir faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum local) et globales (existence par compacité, par exemple). Dans le cas important des fonctions convexes, un minimum local est également global. Les applications de la minimisation des fonctions convexes sont nombreuses et elles peuvent illustrer cette leçon.

L'étude des algorithmes de recherche d'extremums y a toute sa place : méthode du gradient et analyse de sa convergence, méthode à pas optimal,... Le cas particulier des fonctionnelles sur $\mathbb{R}^n$ de la forme $\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$, où A est une matrice symétrique définie positive, ne devrait pas poser de difficultés (la coercivité de la fonctionnelle pose problème à de nombreux candidats). Les problèmes de minimisation sous contrainte amènent à faire le lien avec les extrema liés et la notion de multiplicateur de Lagrange. Sur ce point, certains candidats ne font malheureusement pas la différence entre recherche d'extremums sur un ouvert ou sur un fermé. Une preuve géométrique des extrema liés sera fortement valorisée par rapport à une preuve algébrique, formelle et souvent mal maîtrisée. On peut ensuite mettre en œuvre ce théorème en justifiant une inégalité classique : arithmético-géométrique, Hölder, Carleman, etc... Enfin, la question de la résolution de l'équation d'Euler-Lagrange peut donner l'opportunité de mentionner la méthode de Newton.

Les candidats pourraient aussi être amenés à évoquer les problèmes de type moindres carrés, ou, dans un autre registre, le principe du maximum et des applications.

Plan détaillé :

I - Existence et Unicité

Définition

1) Utilisation de la compacité

Existence

2) Utilisation de la convexité

Convexe + local $\implies$ global

3) Hilbert [17]

Projection sur un convexe

Théorème de Lax-Milgram

4) Fonctions holomorphes

Principe du maximum

II - Localisation et calcul différentiel

1) 1^{er} ordre

Lien entre f' et extrema

2) 2^{nd} ordre

Lien entre f'' et extrema

3) Extrema sous contraintes

Théorème des extrema liés

III - Optimisation

1) Newton

Méthode de Newton

2) Gradient à pas optimal

Méthode de gradient à pas optimal

Développements :

- Théorème des extrema liés
- Méthode de gradient à pas optimal
- Méthode de Newton

Références :

♥♥♥ - [13] Xavier GOURDON, *Analyse*

♥♥♥ - [1] Grégoire ALLAIRE et Sidi Mahmoud KABER, *Algèbre Linéaire Numérique*

♥♥♥♥ - [27] François ROUVIÈRE, *Petit Guide de Calcul Différentiel*

♥♥ - [17] Francis HIRSCH et Gilles LACOMBE, *Éléments d'analyse fonctionnelle*

Leçon 220

Equations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

Rapport du jury :

Une nouvelle fois, le jury s'alarme des nombreux défauts de maîtrise du théorème de CAUCHY- LIPSCHITZ et, plus généralement, de l'extrême faiblesse des connaissances sur les équations différentielles. Il est regrettable de voir des candidats ne connaître qu'un énoncé pour les fonctions globalement lipschitziennes ou, plus grave, mélanger les conditions sur la variable de temps et d'état. Les notions de solution maximale et de solution globale sont souvent confuses. Le théorème de sortie de tout compact est attendu. Bien évidemment, le jury attend des exemples d'équations différentielles non linéaires. Le lemme de GRÖNWALL semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est trop rarement énoncé. L'utilisation du théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ doit pouvoir être mise en œuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées.

Pour les équations autonomes, la notion de point d'équilibre permet des illustrations pertinentes comme par exemple les petites oscillations du pendule. Trop peu de candidats pensent à tracer et discuter des portraits de phase alors que l'intitulé de la leçon y invite clairement.

Il est possible d'évoquer les problématiques de l'approximation numérique dans cette leçon en présentant le point de vue du schéma d'EULER. On peut aller jusqu'à aborder la notion de problèmes raides et la conception de schémas implicites pour autant que le candidat ait une maîtrise convenable de ces questions.

Questions possibles :

- Comment on démontre le Lemme de Gronwall ?
- Que dit le théorème de Cauchy Peano ?
- Tracer le portrait de phase de l'équation différentielle suivante

$$X' = AX \text{ avec } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Motivations :

On sait résoudre des équations d'inconnue x, on s'intéresse ici à des équations où les inconnus sont des fonctions $y(x)$, ce sont des équations différentielles. On va étudier l'existence et l'unicité des solutions grâce à des théorèmes puissants comme le théorème de Cauchy Lipschitz. Ensuite, on s'intéressera aussi à la stabilité des solutions. Soit une solution y de condition initiale $y(t_0) = y_0$, si on fait varier un petit peu la condition initiale autour de y_0, est-ce que la solution reste proche de y ? (stabilité) Est-ce que la solution tend vers y ? (asymptotique stabilité).

Plan détaillé :

I - Existence et Unicité de solutions

Définition solution maximale et globale

Lemme de Gronwall

Cauchy Lipschitz localement lipschitzien

Cauchy Peano

Cauchy Lipschitz et lemme de Gronwall

Lemme des bouts

II - Exemples d'études

1) EDO linéaires

Résolution

Variation de la constante

2) Équations différentielles particulières

Bernoulli

Ricatti

3) $y'' + qy = 0$

Nombres de zéros des solutions d'une équation différentielle

III - Stabilité des systèmes différentielles autonomes

1) Définitions

stable

asymptotique stable

2) Linéaire

Théorème

Portraits de phase en dimension 1 et 2

3) Non linéaire

Théorème de Lyapunov [27]

Développements :

- Cauchy Lipschitz et lemme de Gronwall
- Nombres de zéros des solutions d'une équation différentielle

Références :

♥♥♥ - [13] Xavier GOURDON, *Analyse*

♥♥♥♥♥ - [8] Jean-Pierre DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*

♥♥♥ - [27] François ROUVIÈRE, *Petit Guide de Calcul Différentiel*

Leçon 221

Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Rapport du jury :

Le jury attend d'un candidat qu'il sache déterminer rigoureusement la dimension de l'espace vectoriel des solutions. Le cas des systèmes à coefficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. Le jury attend qu'un candidat puisse mettre en œuvre la méthode de variation des constantes pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 simple (à coefficients constants par exemple) avec second membre ; un trop grand nombre de candidats se trouve déstabilisés par ces questions.

L'utilisation des exponentielles de matrices a toute sa place ici et doit être maitrisée. Les problématiques de stabilité des solutions et le lien avec l'analyse spectrale devraient être exploitées.

Le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire constitue un exemple de développement pertinent pour cette leçon. Les résultats autour du comportement des solutions, ou de leurs zéros, de certaines équations linéaires d'ordre 2 (STURM, HILL-MATHIEU,...) sont aussi d'autres possibilités.

Pour aller plus loin, la résolution au sens des distributions d'équations du type $T' = 0$, ou des situations plus ambitieuses, trouvera sa place dans cette leçon.

Questions possibles :

- Soit A une matrice. Démontrer que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA) = A\exp(tA)$.
- Résoudre $y'' - y = \tan^2(t)$.
- Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Soit $T \in \mathbb{R}$. On considère l'application Φ définie de $\mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R}^m)$ dans $\mathbb{R}^m$ par : $\Phi : u \mapsto \int_0 Te^{(T-t)A}Bu(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $Ker(\Phi)$ est fermé.

Plan détaillé :

I - Existence et Unicité de solutions [13]
- Définition solution maximale / globale
- Théorème de Cauchy Lipschitz
- Écriture matricielle de système différentiel

II - Résolution explicite [20]
- Ensemble des solutions
- $\boxed{\text{Translatés d'une fonction } \mathcal{C}^1}$
- Wronskien
- Variation de la constante
- Cas coefficients constants avec $\exp A$

III - Étude asymptotique
1) Points d'équilibre
   - Stabilité
   - Théorème de Lyapunov

2) Etude de $y'' + qy = 0$ [24]

$\boxed{\text{Nombres de zéros des solutions d'une équation différentielle}}$

IV - Équation différentielles sur les distributions [19]

$T' = 0$

$xT = 0$

$xT = 1$

Développements :

- Translatés d'une fonction $\mathcal{C}^1$
- Nombres de zéros des solutions d'une équation différentielle

Références :

♥♥♥ - [13] Xavier GOURDON, *Analyse*

♥♥♥♥♥ - [8] Jean-Pierre DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*

♥♥ - [19] Ahmed LESFARI, *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace*

♥♥♥ - [20] Ahmed LESFARI, *Équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles*

♥♥♥ - [24] Hervé QUEFFELEC et Claude ZUILY, *Analyse pour l'agrégation*

Leçon 223

Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Rapport du jury :

Cette leçon permet souvent aux candidats de s'exprimer. Il ne faut pas négliger les suites de nombres complexes mais les suites vectorielles (dans R^n) ne sont pas dans le sujet. Le jury attire l'attention sur le fait que cette leçon n'est pas uniquement à consacrer à des suites convergentes, mais tout comportement asymptotique peut être présenté. Le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS doit être cité et le candidat doit être capable d'en donner une démonstration. On attend des candidats qu'ils parlent des limites inférieure et supérieure d'une suite réelle bornée, et qu'ils en maîtrisent le concept. Les procédés de sommation peuvent être éventuellement évoqués mais le théorème de CÉSARO doit être mentionné et sa preuve maîtrisée par tout candidat à l'agrégation. Les résultats autour des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ permettent d'exhiber des suites denses remarquables et l'ensemble constitue un joli thème. Des thèmes des leçons 225 et 226 peuvent également se retrouver dans cette leçon.

Pour aller plus loin, un développement autour de l'équirépartition est tout à fait envisageable. La méthode de NEWTON peut aussi illustrer la notion de vitesse de convergence.

Questions possibles :

- Montrer qu'une suite de Cauchy dont une sous-suite converge est convergente.
- Comment caractérise-t-on la convergence quadratique d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite l ?

  Réponse : Il y a convergence quadratique d'une suite (u_n) vers l lorsqu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $|u_{n+1} - l| \leqslant C|u_n - l|^2$ et (u_n) converge vers l.
- Comment on prouve que $\mathrm{Adh}(u_n) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k, k \geqslant n\}}$.

  Réponse : Soit $l \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k, k \geqslant n\}}$. Par équivalence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $l \in \overline{\{u_k, k \geqslant n\}}$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k \geqslant n$ tel que $u_k \in \mathrm{B}(l, \varepsilon)$. En permutant les deux quantificateurs $\forall$ du début, on trouve $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists k \geqslant n$ tel que $u_k \in \mathrm{B}(l, \varepsilon)$ qui est la définition d'une valeur d'adhérence car on peut alors construire une sous suite qui converge vers l. On a procédé par équivalence, donc l'égalité est vraie.
- Soit une suite (z_n) dans $\mathbb{C}$ qui est bornée et qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence α. Montrer que (z_n) converge vers cette valeur α.

  Réponse : On pose la suite $u_n = |z_n - \alpha|$ qui est une suite réelle. On a $\liminf u_n = \limsup u_n = 0$ car α est la seule valeur d'adhérence de z_n qui est supposée bornée. Donc (u_n) converge vers 0. Ainsi $|z_n - \alpha| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ce qui nous donne $z_n \xrightarrow[n\infty]{} \alpha$ dans $\mathbb{C}$.
- Donner une suite ayant $\mathbb{N}$ comme ensemble de valeurs d'adhérence.

  Réponse : On peut prendre la suite u_n définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$, $u_4 = 2$, $u_5 = 0$, $u_6 = 1$, $u_7 = 2$, $u_8 = 3$, $u_9 = 0\ldots$ Ainsi, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, (u_n) passe une infinité de fois par n.
- Donner une suite ayant $\mathcal{D}$ un ensemble dénombrable fermé d'éléments comme ensemble de valeurs d'adhérence.

  Réponse : On s'appuie sur la question précédente. Si $\mathcal{D} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, on pose la suite $v_n = x_{u_n}$ avec u_n la suite définie dans la question précédente.

  On veut prouver que $\mathcal{D} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{v_k, k \geqslant n\}}$ grâce à la Question **??**.

On a $\mathcal{D} \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{v_k, k \geqslant n\}}$ car $\{v_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ et que $\mathcal{D}$ est fermé.

Réciproquement, puisque (u_n) passait une infinité de fois par n pour tout $n \in \mathbb{N}$, (v_n) va passer une infinité de fois par chaque x_n. Donc $\mathcal{D} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k, k \geqslant n\}}$, ainsi $\mathrm{Adh}(u_n) = \mathcal{D}$.

- Donner une suite ayant F un fermé de $\mathbb{R}$ comme ensemble de valeurs d'adhérence.

  Réponse : Puisque $\mathbb{R}$ est séparable et que F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors F est séparable, donc il existe une famille $\mathcal{D}$ dénombrable et dense dans F. On applique la question précédente, on a donc une suite (w_n) dont les valeurs d'adhérence sont incluses dans F, car F est fermé. De plus, pour tout $x \in F$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous suite de (w_n) qui converge vers une valeur de F qui est proche de ε de la valeur x (car $\mathcal{D}$ est dense dans F). Donc x est valeur d'adhérence de (w_n), donc $F = \mathrm{Adh}(w_n)$.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente bornée définie par un $f \in \mathcal{C}^1$ et telle que (u_n) converge vers une limite l. De plus, $|f'(l)| > 1$, que peut-on dire du comportement de (u_n) lorsque n tend vers l'infini ?

  Réponse : Le point fixe l est un point répulsif, donc pour converger vers l, il faut que la suite stationne au bout d'un moment sur l.

  Quitte à prendre $-f$, on suppose que $f'(l) > 1$, ainsi comme f' est continue et $f'(l) > 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que sur l'intervalle $J :=]l-\alpha; l+\alpha[$, on ait $f' > 1$. Puisque (u_n) converge vers l, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - l| < \alpha$.

  Pour $n \geqslant n_0$, on utilise l'égalité des accroissements finis pour f sur $]l, u_n[$, ce qui nous donne $e \in]l, u_n[$ et $|f(u_n) - f(l)| = |f'(e)||u_n - l|$. De plus, on sait que $f'(e) > 1$ car $]l, u_n[\subset J$. Ainsi pour $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| = |f'(e)||u_n - l| > |u_n - l|$. On a alors $|u_{n+1} - l| > |u_n - l|$, ce qui est absurde car on sait que (u_n) converge vers l. Donc l'intervalle $]l, u_n[$ est vide. Ainsi pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = l$ car l est un point fixe de f, donc dès que la suite atteint la valeur l, elle stationne.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}(2+\sqrt{3})^n\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) converge.

  Réponse : On calcule $(2+\sqrt{3})^n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2+\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{3}^k 2^{n-k} = a_n + \sqrt{3} b_n$$

  avec a_n et b_n entiers. En calculant $(2-\sqrt{3})^n$, on trouve $a_n - \sqrt{3}b_n$ (avec les mêmes a_n et b_n). Ainsi, $(2+\sqrt{3})^n = a_n + \sqrt{3}b_n = 2a_n - (a_n - \sqrt{3}b_n) = 2a_n - (2-\sqrt{3})^n$ avec $a_n \in \mathbb{Z}$. Donc $\sin\left(\frac{\pi}{2}(2+\sqrt{3})^n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(2a_n - (2-\sqrt{3})^n)\right) = \sin\left(\pi a_n - \frac{\pi}{2}(2-\sqrt{3})^n\right) = (-1)^{a_n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}(2-\sqrt{3})^n\right)$ qui converge vers 0 car $(2-\sqrt{3})^n$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc (u_n) converge vers 0.

Motivations :

Dès l'antiquité, les Grecs essayaient d'approcher π au moyen de suites, en faisant tendre des polygones internes et externes à un cercle. On veut donc étudier des suites pour deux raisons, la première est de vouloir approcher un objet et donc on crée une suite (point de vue où l'on a une limite et on crée une suite), la deuxième est d'avoir une suite et de vouloir étudier sa limite ou du moins son comportement (point de vue où l'on a une suite et on veut avoir sa limite). Grâce aux suites, on peut approcher des réels (π, e, γ, ϕ,...), des zéros de fonctions (Newton, sécante,...), des intégrales de Riemann (rectangles, trapèzes, point milieu,...), des équations différentielles (schéma d'Euler, Runge Kutta,...). Dans la dernière partie, on voudra affaiblir la notion de convergence usuelle, en parlant de convergence au sens de Césaro. Cela permet de faire converger la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par exemple, alors qu'elle ne converge pas de manière classique. On aurait pu parler aussi de convergence au sens d'Abel qui est encore plus faible que celle de Césaro.

J'ai rédigé le plan de cette leçon (voir ici) et j'ai écrit **??**.

Plan détaillé :

I - Convergence

Déf : limite dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

Prop : fonction continue et caractérisation séquentielle de la limite

Prop : opérations sur les limites

Déf : suites de Cauchy

Prop : monotonie + borné implique convergence

Thrm des gendarmes

Déf : Suites adjacentes

Application : Critère spécial des séries alternées

Exemples de suites : arithmétiques / géométriques, etc

Équivalence de suites

II - Valeur d'adhérence

Déf : borne sup / borne inf

Déf : limsup / liminf

Déf : sous-suite

Déf : valeurs d'adhérence

Prop : $\mathrm{Adh}(u_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k, k \geqslant n\}}$

Prop : Adh fermé

Thrm : Bolzano-Weierstrass

Application : principe des compacts décroissants

III - Utilisation des suites

1) Trouver des zéros de fonctions

Dichotomie

Méthode de Newton

2) Intégrales

Intégrales de Riemann

3) Équations différentielles

Schéma d'Euler explicite

Schéma d'Euler implicite

IV - Convergence au sens de Césaro

Théorème de Césaro

Réciproques partielles de Césaro

Définition : convergence au sens de Césaro

Application : Fejer, Dirichlet

Développements :

- Réciproques partielles de Césaro
- Méthode de Newton

Références :

♥♥♥♥ - [13] Xavier GOURDON, *Analyse*

♥♥♥ - [7] Jean COMBES, *Suites et séries*

♥♥ - [27] François ROUVIÈRE, *Petit Guide de Calcul Différentiel*

Leçon 224

Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Rapport du jury :

Cette leçon doit permettre aux candidats d'exprimer leur savoir-faire sur les techniques d'analyse élémentaire que ce soit sur les suites, les séries ou les intégrales. On peut par exemple établir un développement asymptotique à quelques termes des sommes partielles de la série harmonique, ou bien la formule de STIRLING que ce soit dans sa version factorielle ou pour la fonction Γ. On peut également s'intéresser aux comportements autour des singularités de fonctions spéciales célèbres. Du côté de l'intégration, on peut évaluer la vitesse de divergence de l'intégrale de la valeur absolue du sinus cardinal, avec des applications pour les séries de FOURIER, voire présenter la méthode de LAPLACE.

Par ailleurs, le thème de la leçon permet l'étude de suites récurrentes (autres que le poncif $u_{n+1} = \sin u_n$), plus généralement de suites ou de fonctions définies implicitement, ou encore des études asymptotiques de solutions d'équations différentielles (sans résolution explicite).

On peut aller plus loin en abordant des techniques de phase stationnaire et en en discutant des applications.

Plan détaillé :

I - Définition et premiers exemples
- 1) Comparaison [13] [26]
  - Echelles de comparaison
- 2) DL
  - Définition
  - Taylor Young
- 3) Développement asymptotique
  - Sommation
  - Composition
  - Intégration des relations de comparaison

II - Etude asymptotique de suites et de fonctions explicites
- 1) Suites récurrentes
  - Points fixes
  - Méthode de Newton
- 2) Utilisation de Série Intégrale
  - Sommation partielle/Equivalence des restes
  - Série harmonique
  - Euler MacLaurin [13]
  - Stirling
  - Comparaison Série-Intégrale
  - Série de Bertrand
- 3) Utilisation de fonctions

Formule de Poisson et équivalent Θ

III - Etude asymptotique de suites et de fonctions implicites

1) Nombre de zéros d'une équation différentielle [24]

Nombres de zéros des solutions d'une équation différentielle

2) Etude intégrale

Théorème des fonctions implicites

Exo 79 du Rouvière [27]

Développements :

- Nombres de zéros des solutions d'une équation différentielle
- Formule de Poisson et équivalent Θ

Références :

♥♥♥♥ - [13] Xavier GOURDON, *Analyse*

♥♥ - [24] Hervé QUEFFELEC et Claude ZUILY, *Analyse pour l'agrégation*

♥♥ - [26] Jean-Etienne ROMBALDI, *Éléments d'analyse réelle*

♥♥ - [27] François ROUVIÈRE, *Petit Guide de Calcul Différentiel*

Leçon 226

Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations

Rapport du jury :

Citer au moins un théorème de point fixe est évidemment pertinent et savoir le mettre en oeuvre sur un exemple simple est indispensable. Le jury est toutefois surpris que des candidats évoquent un théorème de point fixe dans les espaces de Banach... sans être capables de définir ce qu'est un espace de Banach ou d'en donner un exemple ! On peut déjà commencer par énoncer un théorème de point fixe sur $\mathbb{R}$. Le jury attend d'autres exemples que la sempiternelle suite récurrente $u_{n+1} = \sin u_n$ (dont il est souhaitable de savoir expliquer les techniques sous-jacentes et le jury ne se privera pas de vérifier ce point sur un exercice). La notion de points attractifs ou répulsifs peut illustrer cette leçon.

L'étude des suites linéaires récurrentes d'ordre p est souvent mal connue, notamment le lien avec l'aspect vectoriel, d'ailleurs ce dernier point est trop souvent négligé. Le comportement des suites vectorielles définies par une relation linéaire $X_{n+1} = AX_n$ fournit pourtant un matériel d'étude conséquent.

La formulation de cette leçon invite résolument à évoquer les problématiques de convergence d'algorithmes (notamment savoir estimer la vitesse) d'approximation de solutions de problèmes linéaires et non linéaires : dichotomie, méthode de Newton (avec sa généralisation au moins dans $\mathbb{R}^2$), algorithme du gradient, méthode de la puissance, méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, schéma d'Euler,...

Questions possibles :

- Donner un équivalent de la suite $u_{n+1} = \sin u_n$.

  Réponse : $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ (voir Gourdon Analyse [13, p.218])

Motivations :

Les suites récurrentes sont des suites particulières beaucoup étudiées car elles ont des propriétés génériques et que c'est un outil facile pour créer une suite. La suite récurrente est très liée à la fonction servant à la définir. En effet, si f est continue, la suite récurrente liée à f convergera forcément vers un point fixe de f si elle converge (d'où l'étude des points fixes dans la première partie). On s'intéressera ensuite à 3 problèmes que l'on résoudra grâce aux suites récurrentes : l'approximation d'un zéro d'un fonction, l'approximation d'une solution de $AX = B$, l'approximation d'une solution d'équation différentielle par les schémas d'Euler.

J'ai rédigé le plan de cette leçon (voir ici)

Plan détaillé :

I - Suites récurrentes

1) Définitions et théorie

Définition d'une suite récurrente

Prop : si f est continue en la limite l, on a $f(l) = l$.

- Convergence de polygones vers l'isobarycentre
- Prop : croissance et décroissance de la suite

2) Suites particulières
   - Arithmétique
   - Géométrique
   - Récurrente à coefficients constants
3) Théorie de point fixe
   - Propriétés élémentaires de fonctions continues sur un compact
   - Théorème de point fixe de Picard
   - Application : Cauchy Lipschitz

II - Recherche de zéros d'une fonction

1) Dichotomie
   - Principe et algorithmie
2) Newton
   - Méthode de Newton

III - Recherche de solutions approchées de $AX = B$

1) Jacobi Gauss Seidel
   - Thrm : Convergence SSI $\rho(M^{-1}N) < 1$
   - Jacobi
   - Gauss Seidel
   - Relaxation
2) Gradient à pas optimal
   - Thrm : $AX = B$ SSI X minimise $f : x \mapsto 1/2\langle Ax, x\rangle - \langle B, x\rangle$
   - Algorithme
   - Méthode de gradient à pas optimal

IV - Recherche de solution approchée d'équation différentielle

1) Schéma d'Euler explicite
   - Discrétisation du temps
   - Algorithme
2) Schéma d'Euler implicite
   - Algorithme
   - Avantages et inconvénients par rapport à explicite

En annexe :

- Convergence des polygones vers l'isobarycentre
- Méthode de la Dichotomie
- Méthode de Newton
- Schéma d'Euler explicite

Développements :

- Méthode de gradient à pas optimal
- Méthode de Newton
- Convergence de polygones vers l'isobarycentre

Références :

♥♥♥ - [13] Xavier GOURDON, *Analyse*
♥♥ - [1] Grégoire ALLAIRE et Sidi Mahmoud KABER, *Algèbre Linéaire Numérique*
♥♥ - [22] Alfio QUARTERONI, Riccardo SACCO et Fausto SALERI, *Méthodes Numériques*

Leçon 228

Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Rapport du jury :

Cette leçon permet des exposés de niveaux très variés. Les théorèmes de base doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants, par exemple le théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée. Le jury s'attend évidemment à ce que le candidat connaisse et puisse calculer la dérivée des fonctions usuelles. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La stabilité par passage à la limite des notions de continuité et de dérivabilité doit être comprise par les candidats. De façon plus fine, on peut s'intéresser à des exemples de fonctions continues nulle part dérivables.

Les propriétés de régularité des fonctions convexes peuvent être mentionnées. Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions lipschitziennes ou des fonctions monotones relève de cette leçon. L'étude des liens entre dérivée classique et dérivée au sens des distributions de fonctions telles que la fonction de Heaviside, de la valeur absolue ou de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(y)dy$, f étant intégrable, peuvent trouver leur place dans cette leçon. On peut aussi relier la dérivée faible et la limite du taux d'accroissement au sens des distributions et établir le lien entre fonction croissante et dérivée faible positive.

Plan détaillé :

I - Continuité et dérivabilité

1) Continuité

Définition

Déf : uniformément continu

2) Dérivabilité

Déf : lien avec la continuité

Déf : taux d'accroissement

Déf : dérivabilité

Déf : $\mathcal{C}^1$

Déf : $\mathcal{C}^\infty$

II - Théorème principaux

1) Théorèmes de base

Thrm des valeurs intermédiaires

Thrm de Rolle

Thrm des accroissements finis

Taylor

2) Suites et séries

limite uniforme des fonctions continues

Thrm de Dini

Thrm de dérivation sous le signe somme

Formule de Poisson et fonction Θ

3) Intégrales à paramètre

Thrm de continuité sous l'intégrale

Thrm de dérivation sous l'intégrale

Application : fonction Gamma

III - Fonctions particulières

1) Fonctions lipschitzienne

Prop : Lipschitzienne implique uniformément continue

2) Fonctions monotones

Prop : Nombre dénombrable de point de discontinuité

3) Fonctions convexes

Prop : continuité sur l'ouvert de définition

Méthode de Newton

4) Solutions d'équations différentielles linéaires

Translatés d'une fonction $\mathcal{C}^1$

IV - Distributions

1) Définitions

2) Dérivations

Développements :

- Translatés d'une fonction $\mathcal{C}^1$
- Méthode de Newton
- Formule de Poisson et fonction Θ

Références :

♥♥♥♥ - [13] Xavier GOURDON, *Analyse*

♥♥ - [26] Jean-Etienne ROMBALDI, *Éléments d'analyse réelle*

♥♥♥ - [16] Bertrand HAUCHECORNE, *Les contre-exemples en Mathématiques*

♥♥♥ - [10] Mohammed EL AMRANI, *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*

♥♥ - [19] Ahmed LESFARI, *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace*

Leçon 229

Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Rapport du jury :

L'énoncé et la connaissance de la preuve de l'existence de limites à gauche et à droite pour les fonctions monotones sont attendues. Ainsi on doit parler des propriétés de continuité et de dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes de la variable réelle. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs. On notera que la monotonie concerne les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, qui fournissent de beaux exemples d'utilisation. L'étude de la fonctionnelle quadratique ou la minimisation de $\|Ax - b\|^2$ pourront illustrer agréablement cette leçon.

Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat remarquable (dont la preuve peut être éventuellement admise). L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon. Enfin, la dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité ; les candidats maîtrisant ces notions peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.

Motivations :

On va étudier les fonctions monotones et les fonctions convexes car ce sont des fonctions particulières qui présentent certains avantages. Par exemple, les fonctions convexes nous donnent la continuité sur l'ouvert de définition. Les fonctions monotones sont stables par composition et permettent de donner des critères de convergence pour les suites récurrentes. Les fonctions convexes peuvent servir en optimisation (en utilisant la différentiabilité).

I - Fonctions monotones [13]
  1) Définition
    Définition
    Lien avec les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$
  2) Régularité
    Dénombrabilité du nombre de points de discontinuité
    limite à droite et à gauche
    escalier de Cantor
    Prop : croissant si $f' \geqslant 0$
    Prop : Si f est positive, $\int^x f$ est croissante
    F_X fonction de répartition croissante, discontinuité si atome
  3) Utilisation
    Théorème de Dini
    Comparaison Série-Intégrale
II - Fonctions convexes [26]
  1) Définition

Définition de la convexité

Inégalité de convexité et concavité

Inégalité de Hölder

Inégalité de Hoeffding

2) Caractérisation

f convexe ssi $f'' \geqslant 0$

en dimension 1, $f(\frac{x+y}{2}) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$

3) Régularité

Continuité sur l'ouvert de définition

Dérivabilité

III - Optimisation

1) Existence et unicité d'extrema

Méthode de Newton

Méthode de la sécante

2) Méthode de descente

Méthode de gradient à pas optimal

Développements :

- Méthode de Newton
- Méthode de gradient à pas optimal

Références :

♥♥♥♥ - [13] Xavier GOURDON, *Analyse*

♥♥♥ - [26] Jean-Etienne ROMBALDI, *Éléments d'analyse réelle*

♥♥ - [4] Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ, *Objectif Agrégation*

♥♥ - [25] Edmond RAMIS, Calude DESCHAMPS et Jacques ODOUX, *Cours de Mathématiques 3 : Topologie et éléments d'analyse*

Leçon 230

Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Rapport du jury :

De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel de la matière de la leçon. Un thème important de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, développements asymptotiques — par exemple pour certaines suites récurrentes — cas des séries de RIEMANN, comparaison séries et intégrales,...). Le manque d'exemples est à déplorer.

On peut aussi s'intéresser à certaines sommes particulières, que ce soit pour exhiber des nombres irrationnels (voire transcendants), ou mettre en valeur des techniques de calculs non triviales (par exemple en faisant appel aux séries de FOURIER ou aux séries entières).

Enfin, si le jury apprécie que le théorème des séries alternées (avec sa version sur le contrôle du reste) soit maîtrisé, il rappelle aussi que ses généralisations possibles utilisant la transformation d'ABEL trouvent toute leur place dans cette leçon.

Plan détaillé :

I - Séries numériques

Définition

$\sum u_n$ converge implique $u_n \to 0$

Définition de la convergence absolue

Prop : Equivalence entre :

(i) E est de Banach

(ii) $\sum u_n$ converge absolument $\implies$ $\sum u_n$ converge dans E

Déf : série semi-convergente

Ex : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

Prop : Règle de produit de Cauchy des séries

II - Critère de convergence

1) Séries à termes positifs

$u_n \leqslant v_n$ implique $\sum u_n \leqslant \sum v_n$

Série de Riemann

Série de Bertrand

Critère de D'Alembert

Critère de Cauchy

2) Autres critères

Critère des séries alternées

Transformation d'Abel

III - Comportement des restes et sommes partielles

1) Majoration classique des restes

$\left|\sum u_n\right| \leqslant \sum |u_n|$

$u_n, v_n \geqslant 0$, si $u_n \leqslant v_n$ et $\sum u_n, \sum v_n$ convergent, alors $\sum_{n+1}^{\infty} u_k \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} v_k$

Majoration des restes des séries alternées

2) Relations de comparaison

thrm classiques

3) Comparaison série-intégrale

Principe

Application : Réciproques partielles de Césaro

IV - Utilisation des séries entières

Théorème d'Abel

Exemples [13]

Nombres de Bell

Développements :

- Réciproques partielles de Césaro
- Nombres de Bell

Références :

♥♥♥♥ - [13] Xavier GOURDON, *Analyse*

♥♥♥♥ - [7] Jean COMBES, *Suites et séries*

♥♥♥ - [16] Bertrand HAUCHECORNE, *Les contre-exemples en Mathématiques*

♥♥♥ - [10] Mohammed EL AMRANI, *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*

Leçon 233

Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

Rapport du jury :

Pour la session 2019, l'intitulé de cette leçon sera reformulé en **Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systémes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.**

Le jury reprend une formulation antérieure de l'intitulé car la leçon se focalisait trop exclusivement sur la résolution de systèmes linéaires par des méthodes itératives. Le jury souhaite un sujet plus ouvert et des propositions qui ne négligent plus la recherche de vecteurs propres et, de manière générale, l'exploitation de techniques d'analyse pour aborder la résolution approchée de systèmes linéaires et de leurs propriétés spectrales et approfondir la compréhension des algorithmes.

Dans cette leçon de synthèse, les notions de norme matricielle et de rayon spectral sont centrales, en lien avec le conditionnement et avec la convergence des méthodes itératives ; elles doivent être développées et maîtrisées. Le conditionnement d'une matrice symétrique définie positive doit être connu et un lien avec $\sup_{\|x\|=1} {}^t x A x$ doit être fait. Le résultat général de convergence, relié au théorème du point fixe de Banach, doit être enrichi de considérations sur la vitesse de convergence.

Le jury invite les candidats à étudier diverses méthodes issues de contextes variés : résolution de systèmes linéaires, optimisation de fonctionnelles quadratiques (du type $\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$), recherche de valeurs propres,... Parmi les points intéressants à développer, on peut citer les méthodes de type Jacobi pour la résolution de systèmes linéaires, les méthodes de gradient dans le cadre quadratique, les méthodes de puissance et QR pour la recherche de valeurs propres. Les candidats pourront illustrer leur propos sur des matrices issues de schémas numériques pour les équations différentielles ou aux dérivées partielles linéaires.

Questions possibles :

- À quoi sert la décomposition QR ?

  Réponse : Elle peut servir à résoudre des systèmes linéaires de la forme $AX = B$, ou encore à rechercher les valeurs propres d'une matrice.

Motivations :

La résolution du système $AX = B$ est une question importante en mathématiques, car c'est un problème qui revient souvent : en arithmétique, pour résoudre des systèmes linéaires, en algèbre linéaire pour calculer des projections, en analyse numérique pour approcher des solutions d'équations différentielles, etc. On a différentes méthodes pour résoudre ce système, des méthodes directes comme le pivot de Gauss, des méthodes approchées comme les méthodes de Jacobi, Gauss Seidel et relaxation. On peut aussi utiliser des méthodes de gradient pour minimiser une fonctionnelle qui aura pour solution la solution du système linéaire. Parfois on sait que le système n'a pas de solution ($B \notin \mathrm{Im}(A)$) mais on veut approcher le mieux possible une "solution" proche ($\inf_X \|AX - B\|$), c'est ce qu'on appelle le problème des moindres carrés.

J'ai rédigé le plan de cette leçon (voir ici)

Plan détaillé :

I - Outil matriciel [1]

Définition d'une norme matricielle

Définition d'une norme subordonnée

Prop : une norme subordonnée est une norme matricielle

Définition du rayon spectral

Prop : $\rho(A) = \lim \left(\|A^k\|\right)^{1/k}$

Définition du conditionnnement

Propriétés du conditionnement

II - Résolution exacte et approchée de $AX = B$

1) Résolution exacte

Pivot de Gauss

Méthode LU

Méthode QR

2) Pb des moindres carrés [1]

Problème de minimisation

3) Approximation [6]

Jacobi

Gauss Seidel

Relaxation

Méthode de gradient à pas optimal

III - Recherche de valeurs propres et vecteurs propres

1) Méthode de la puissance

Théorème

2) Méthode QR

Méthode QR

Explication de la recherche de valeurs propres et vecteurs propres

IV - Approximation d'une solution d'équation différentielle

1) Euler explicite

Théorème

Avantage et inconvénient

2) Euler implicite

Théorème

Avantage et inconvénient

Développements :

- Méthode QR
- Méthode de gradient à pas optimal

Références :

♥♥♥ - [14] Joseph GRIFONE, *Algèbre Linéaire*

♥♥♥ - [6] Philippe CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*

♥♥♥♥ - [1] Grégoire ALLAIRE et Sidi Mahmoud KABER, *Algèbre Linéaire Numérique*

♥♥♥ - [22] Alfio QUARTERONI, Riccardo SACCO et Fausto SALERI, *Méthodes Numériques*

Leçon 236

Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Rapport du jury :

Cette leçon doit être très riche en exemples, que ce soit l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ ou bien d'autres encore. Il est tout à fait pertinent de commencer par les différentes techniques élémentaires (intégration par parties, changement de variables, décomposition en éléments simples, intégrale à paramètres,...). On peut également présenter des utilisations du théorème des résidus, ainsi que des exemples faisant intervenir les intégrales multiples comme le calcul de l'intégrale d'une gaussienne. Le calcul du volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ ne doit pas poser de problèmes insurmontables. Le calcul de la transformation de Fourier d'une gaussienne a sa place dans cette leçon.

On peut aussi penser à l'utilisation du théorème d'inversion de Fourier ou du théorème de Plancherel. Certains éléments de la leçon précédente, comme par exemple l'utilisation des théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée et/ou de Fubini, sont aussi des outils permettant le calcul de certaines intégrales.

Enfin, il est tout à fait pertinent d'évoquer les méthodes de calcul approché d'intégrales (méthodes des rectangles, méthode de Monte-Carlo, etc.).

Questions possibles :

- Comment calculer $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$? (intégrale de Dirichlet)

Motivations :

L'intégrale possède diverses applications que ce soit pour calculer des aires et des volumes, pour généraliser la notion de somme discrète ou pour calculer des moyennes continues. On a besoin notamment en physique de calculer de nombreuses intégrales venant d'équations différentielles par exemple. On s'intéresse donc ici aux calculs d'intégrales allant des méthodes les plus classiques (changement de variables, intégration par parties) à d'autres méthodes plus compliquées (Transformée de Fourier, convolution, Théorème des Résidus). On a parfois besoin de méthodes itératives pour calculer des intégrales (comme les méthodes des rectangles, des trapèzes, du point milieu, de Simpson, de Monte-Carlo).

I - Calcul direct

1) Intégrales de fonctions à une seule variable [13]

Primitive directe

IPP

Changement de variable simple

Décomposition en éléments simples

2) Intégrales de fonctions à plusieurs variables [5]

Changement de variable sur $\mathbb{R}^d$

Fubini

II - Méthodes utilisant l'étude d'une fonction ou d'une suite de fonctions

1) Suites et séries de fonctions [5]

Convergence dominée

Interversion intégrale somme

2) Intégrales à paramètres

Continuité sous le signe intégral

Dérivabilité sous le signe intégral

Transformation de Fourier

Formule d'inversion de la fonction caractéristique

3) Analyse complexe et Théorème des résidus [18]

Formule de Cauchy

Théorème des résidus

Formule des compléments

III - Calcul approché

1) Méthodes itératives [22]

Rectangles

Trapèzes

Point milieu

Simpson

2) Monté-Carlo [28]

Méthode de Monté Carlo

Développements :

- Formule d'inversion de la fonction caractéristique
- Formule des compléments

Références :

♥♥♥♥ - [13] Xavier GOURDON, *Analyse*

♥♥♥♥ - [5] Marc BRIANE et Gilles PAGÈS, *Théorie de l'intégration*

♥♥ - [18] Paul JOLISSAINT, *Fonctions d'une variable complexe, théorie de Cauchy élémentaire et applications*

♥♥ - [22] Alfio QUARTERONI, Riccardo SACCO et Fausto SALERI, *Méthodes Numériques*

♥ - [28] Paul TOULOUSE, *Thèmes de probabilités et statistique*

Leçon 239
Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Rapport du jury :

Les candidats incluent les théorèmes de régularité (version segment — a minima — mais aussi version "convergence dominée") ce qui est pertinent mais la leçon ne doit pas se réduire seulement à cela. Cette leçon doit être riche en exemples, ce qui parfois n'est pas suffisamment le cas, et peut être encore enrichie par des études et méthodes de comportements asymptotiques. Les propriétés de la fonction Γ d'EULER fournissent un développement standard, mais non sans risque (on pourra y inclure le comportement asymptotique, voire son prolongement analytique) ; certains candidats sont trop ambitieux pour le temps dont ils disposent. Le jury invite donc à bien préciser ce que le candidat souhaite montrer pendant son développement. Les différentes transformations classiques (FOURIER, LAPLACE,...) relèvent aussi naturellement de cette leçon. On peut en donner des applications pour obtenir la valeur d'intégrales classiques (celle de l'intégrale de DIRICHLET par exemple). Le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale est trop peu souvent cité.

Pour aller encore plus loin, on peut par exemple développer les propriétés des transformations mention- nées (notamment la transformée de FOURIER, par exemple en s'attardant sur le lien entre régularité de la fonction et décroissance de sa transformée de FOURIER), ainsi que de la convolution.

Questions possibles :

- Comment on prouve Riemann–Lebesgue ?
  Réponse : en faisant une IPP puis en utilisant la densité des fonctions $\mathcal{C}_1$ dans L^1
- Qu'est ce que vous connaissez comme transformée de Fourier ?
  Réponse : la gaussienne, l'indicatrice d'un segment, $(1+x^2)^{-1}$
- Comment on construit une suite régularisante ?
  Réponse : on peut utiliser des fonctions plateaux
- Pour ρ_n une approximation de l'unité et $f \in L^p$, pourquoi $\|\rho_n \star f - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$?
- A quoi cela peut servir d'avoir la densité de $\mathcal{C}_0^\infty$ dans L^p ?
- A quoi ça sert d'avoir $\widehat{f \star g} = \widehat{f}\widehat{g}$?
  Réponse : Transformée de Fourier discrète pour le produit de polynômes ?
- Calculer la transformée de Fourier de $\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
- Que vaut $L^p \star L^q$?
  Réponse : $L^p \star L^q$ donne L^r où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$
- Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} e^{a|x|}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x < +\infty$.
- Dans le théorème de convergence, pourquoi peut-on s'affranchir de l'hypothèse de domination de la dérivée, dans le cas holomorphe ?
  Réponse : Utiliser le développement en série entière.
- Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$.

Points essentiels :

- La convolution régularise les fonctions
- La transformée de Fourier inverse régularité et décroissance à l'infini

Plan détaillé :

I - Régularité des intégrales à paramètre

1) Continuité et dérivabilité [5]

Théorème de continuité

Théorème de dérivabilité

Exemple de la fonction Gamma

2) Holomorphie [18]

Théorème d'holomorphie sous l'intégrale

Théorème des résidus

Formule des compléments

II - Convolution [5] [17]

1) Convolution

Définition

Propriétés

Théorème avec les espaces L^p.

2) Approximation de l'unité

Lien avec la convolution

Propriétés

Lien avec la densité des fonctions $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ dans les $L^p(\mathbb{R})$.

III - Transformation de Fourier [24]

1) Transformée de Fourier

Définition

Propriétés

Transformée de Fourier inverse

Formule de Poisson et Shannon

2) Fonction caractéristique

Définition

Propriétés

Lien avec les moments

Formule d'inversion de la fonction caractéristique

Lien avec la convergence en loi

Astuces de l'agrégatif :

Pour la convolution il faut retenir que $L^p \star L^q = L^r$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$

Remarques :
Attention, je ne parle pas de transformée de Laplace et de méthode de Laplace mais cela a toute sa place dans cette leçon, c'est seulement un choix personnel.

Développements :

- Formule d'inversion de la fonction caractéristique
- Formule des compléments
- Formule de Poisson et Shannon

Références :

♥♥♥ - [13] Xavier GOURDON, *Analyse*

♥♥♥♥♥ - [5] Marc BRIANE et Gilles PAGÈS, *Théorie de l'intégration*

♥♥ - [18] Paul JOLISSAINT, *Fonctions d'une variable complexe, théorie de Cauchy élémentaire et applications*

♥♥♥ - [17] Francis HIRSH et Gilles LACOMBE, *Éléments d'analyse fonctionnelle*

♥♥♥ - [24] Hervé QUEFFELEC et Claude ZUILY, *Analyse pour l'agrégation*

♥♥♥ - [16] Bertrand HAUCHECORNE, *Les contre-exemples en Mathématiques*

Leçon 243

Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Rapport du jury :

Les candidats évoquent souvent des critères (Cauchy, D'Alembert) permettant d'estimer le rayon de convergence mais oublient souvent la formule de Cauchy-Hadamard ou toute technique utilisant une majoration ou un équivalent. Le jury attend bien sûr que le candidat puisse donner des arguments justifiant qu'une série entière en 0 dont le rayon de convergence est R est développable en série entière en un point z_0 intérieur au disque de convergence et de minorer le rayon de convergence de cette série. Sans tomber dans un catalogue excessif, on peut indiquer les formules de développement de fonctions usuelles importantes (exp, log, $1/(1-z)$, sin, ...). S'agissant d'exemples fondamentaux et classiques, le jury attend que le candidat puisse les donner sans consulter ses notes. En ce qui concerne la fonction exponentielle, le candidat doit avoir réfléchi au point de vue adopté sur sa définition et donc sur l'articulation entre l'obtention du développement en série entière et les propriétés de la fonction. À ce propos, les résultats sur l'existence du développement en série entière pour les fonctions dont on contrôle toutes les dérivées successives sur un voisinage de 0 sont souvent méconnus. Le comportement de la série entière dans le disque de convergence vis à vis des différents modes de convergence (convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale) doit être maîtrisé.

Le théorème d'Abel (radial ou sectoriel) trouve toute sa place mais doit être agrémenté d'exercices pertinents. Réciproquement, les théorèmes taubériens offrent aussi de jolis développements. On pourra aller plus loin en abordant quelques propriétés importantes liées à l'analyticité de la somme d'une série entière ou encore la résolution de certaines équations différentielles ordinaires par la méthode du développement en série entière.

Questions possibles :

- Donner une fonction développable en série de Taylor mais qui n'est pas analytique

  Réponse : $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$

Motivations :

Les séries entières sont des cas particuliers de séries de fonctions. Elles ont beaucoup d'applications, que ce soit en équations différentielles ou en dénombrement (série génératrices). On peut voir les séries entières de deux façons, la première est comme un objet algébrique (c'est la vision de la partie I) et on peut aussi étudier la fonction qui à z associe la série entière (c'est le point de vue analytique de la partie II). Attention aux séries de Taylor qui convergent mais qui ne coïncident pas avec la série entière de la fonction que l'on considère (ex : $\exp(-\frac{1}{x^2})$). Historiquement, les Grecs avaient du mal avec les sommes infinis, ils connaissaient déjà la série géométrique. Ensuite au XVII$^{\text{ième}}$ siècle, on voulait trouver des développements d'autres fonctions. On ne parle pas encore de rayon de convergence. Euler voit les "séries entières" comme une généralisation des polynomes. Ensuite Taylor étudie cela et pense que toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ était analytique, mais Cauchy prouve que ce n'est pas le cas. C'est lui qui cadre toute la théorie, le rayon de convergence et le lien avec l'analycité.

Points essentiels :

- le lien entre fonction analytique et développement de Taylor.
- rayon de convergence et les moyens de le calculer

J'ai rédigé le plan de cette leçon (voir ici)

Plan détaillé :

I - Un objet algébrique et analytique [13]

1) Définition et rayon de convergence

Définition

Théorème du rayon de convergence

Critère de D'Alembert

Critère de Cauchy

2) Opérations algébriques

Somme

Multiplication par un scalaire

Structure d'espace vectoriel

Produit de Cauchy

Composition

Inverse

3) Comportement sur le disque de convergence

Théorème taubérien

Théorème d'Abel

$\boxed{\text{Formule de Poisson et équivalent } \Theta}$

II - Régularité de la fonction série entière

1) Continuité et dérivabilité

Continuité

Dérivabilité

Primitive d'une série entière

2) Prolongement analytique [24]

Développement de Taylor

Définition d'une fonction analytique

3) Lien avec l'holomorphie [13]

Théorème d'holomorphie de la série entière sur le disque de convergence

Théorème des zéros isolés

Formule de Cauchy

III - Applications des séries entières

1) Équations différentielles [13]

Résolution d'une équation différentielle par une série entière

Fonction de Bessel

2) Dénombrement

Nombres de Catalan [12, p.9]

$\boxed{\text{Nombres de Bell}}$

En annexe :

- développements en série entière de exp, sin, cos, sh, ch, $(1+x)^\alpha$, log, arctan, argth, arcsin, argsh.

Développements :

- Nombres de Bell
- Formule de Poisson et équivalent Θ

Références :

♥♥♥♥ - [13] Xavier GOURDON, *Analyse*

♥♥♥ - [24] Hervé QUEFFELEC et Claude ZUILY, *Analyse pour l'agrégation*

♥♥ - [12] Serge FRANCINOU, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS, *Oraux X-ENS, Algèbre 1*

Leçon 246
Séries de Fourier. Exemples et applications.

Rapport du jury :

Les différents résultats autour de la convergence (L^2, Fejér, Dirichlet, ...) doivent être connus. On prendra garde au sens de la notation $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$ (qu'il est plus prudent d'éviter car elle est souvent inadaptée). Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Le théorème d'isométrie bijective entre espaces L^2 et ℓ^2 doit apparaitre. Dans le cas d'une fonction continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Il est classique d'obtenir des sommes de séries remarquables comme conséquence de ces théorèmes.

On peut aussi s'intéresser à la formule de Poisson et à ses conséquences. L'existence d'exemples de séries de Fourier divergentes, associées à des fonctions continues (qu'ils soient explicites ou obtenus par des techniques d'analyse fonctionnelle) peuvent aussi compléter le contenu.

Il est souhaitable que cette leçon ne se réduise pas à un cours abstrait sur les coefficients de Fourier. La résolution d'équations aux dérivées partielles (par exemple l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes avec une estimation de la vitesse de convergence) peut illustrer de manière pertinente cette leçon, mais on peut penser à bien d'autres applications (inégalité isopérimétrique, comportements remarquables des fonctions à spectre lacunaire,...).

Questions possibles :

- Calculer $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ en utilisant les coefficients de Fourier.

  Réponse : voir Gourdon Analyse

- Comment on prouve Riemann-Lebesgue ?

  Réponse : pour les fonctions $\mathcal{C}^1$ puis par densité dans L^1

- Calculer les coefficients de Fourier de $\left\{\begin{array}{ccc} [-\pi,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}\right.$

  Réponse : $c_n(f) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair (non nul)} \\ -\frac{2}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

- Existe-t-il $f \in \mathcal{C}(0,2\pi)$ périodique telle que $c_n(f)$ décroit en $\frac{1}{\ln n}$?

  Réponse : non

Motivations :

Les coefficients de Fourier sont très utiles notamment en physique pour exprimer un signal qu'avec une suite indexée sur $\mathbb{Z}$. On calcule facilement à partir d'une fonction f ses coefficients de Fourier $c_n(f)$, inversement, on veut savoir sous quelles hypothèses, on peut retrouver la fonction f à partir de ses coefficients de Fourier. On va donc avec des théorèmes de convergence (Fejer, Dirichlet) utilisant les noyaux associés[4]. Puis je parle de coefficients de Fourier dans L^2, on pourra

4. je ne parle pas du noyau de Poisson dans cette leçon, mais on pourrait

ainsi montrer que les polygones orthogonaux forment une base hilbertienne de L^2. Je prends comme convention

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall f \in L^1([0,2\pi]),\quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx}$$

Plan détaillé :

I - Coefficients et séries de Fourier dans L^1

1) Définitions

Définitions des $c_n(f)$

Lemme de Riemann Lebesgue

2) Séries de Fourier

Définition

II - Noyaux trigonométriques

1) Noyaux

Dirichlet

Fejer

2) Théorèmes de convergence

Banach–Steinhaus

Théorème de Fejer

Théorème de Dirichlet

Formule de Poisson et fonction Θ ou Formule de Poisson et Shannon

III - Étude dans L^2

Définition dans L^2 Hilbert

Base hilbertienne des polynomes triognométriques par Fejer

Isométrie et égalité de Parseval

Exemple de calcul de sommes : $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

Développements :

- Banach–Steinhaus
- Formule de Poisson et fonction Θ
- Formule de Poisson et Shannon

Références :

♥♥♥ - [13] Xavier GOURDON, *Analyse*

♥♥♥♥♥ - [9] Mohammed EL AMRANI, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*

♥♥ - [24] Hervé QUEFFELEC et Claude ZUILY, *Analyse pour l'agrégation*

♥♥ - [16] Bertrand HAUCHECORNE, *Les contre-exemples en Mathématiques*

Leçon 250
Transformation de Fourier. Applications.

Rapport du jury :

Cette leçon offre de multiples facettes. Les candidats peuvent adopter différents points de vue : L^1, L^2 et/ou distributions. L'aspect "séries de FOURIER" n'est toutefois pas dans l'esprit de cette leçon ; il ne s'agit pas de faire de l'analyse de FOURIER sur n'importe quel groupe localement compact mais sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$.

La leçon nécessite une bonne maîtrise de questions de base telle que la définition du produit de convolution de deux fonctions de L^1. En ce qui concerne la transformation de FOURIER, elle ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de FOURIER. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soigneuse des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. Le lien entre la régularité de la fonction et la décroissance de sa transformée de FOURIER doit être fait, même sous des hypothèses qui ne sont pas minimales. Les candidats doivent savoir montrer le lemme de RIEMANN-LEBESGUE pour une fonction intégrable.

La formule d'inversion de FOURIER pour une fonction L^1 dont la transformée de FOURIER est aussi L^1 est attendue ainsi que l'extension de la transformée de FOURIER à l'espace L^2 par FOURIER-PLANCHEREL. Des exemples explicites de calcul de transformations de FOURIER, classiques comme la gaussienne ou $(1+x^2)^{-1}$, paraissent nécessaires.

Pour aller plus loin, la transformation de FOURIER des distributions tempérées ainsi que la convolution dans le cadre des distributions tempérées peuvent être abordées. Rappelons une fois de plus que les attentes du jury sur ces questions restent modestes, au niveau de ce qu'un cours de première année de master sur le sujet peut contenir. Le fait que la transformée de FOURIER envoie $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui même avec de bonnes estimations des semi-normes doit alors être compris et la formule d'inversion de FOURIER maîtrisée dans ce cadre. Des exemples de calcul de transformée de FOURIER peuvent être donnés dans des contextes liés à la théorie des distributions comme par exemple la transformée de FOURIER de la valeur principale. Dans un autre registre, il est aussi possible d'orienter la leçon vers l'étude de propriétés de fonctions caractéristiques de variables aléatoires.

La résolution de certaines équations aux dérivées partielles telles que, par exemple, l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$, peut être abordée, avec une discussion sur les propriétés qualitatives des solutions.

Questions possibles :

- Calculer la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[a,b]}$.

  Réponse : on obtient un sinus cardinal
- Calculer la transformée de Fourier de la gaussienne.

  Réponse : on obtient une gaussienne
- Calculer la transformée de Fourier de e^{-t}.

  Réponse : on obtient $\dfrac{2}{1+\xi^2}$
- Comment montre-t-on la formule d'inversion de la transformée de Fourier ?
- Comment montre-t-on le théorème de Fourier-PLancherel ?

Motivations :

On va étudier la transformée de Fourier qui est un outil très puissant pour résoudre des équations différentielles. La transformée de Fourier inverse régularité et décroissance à l'infini. On définit proprement la transformée de Fourier sur L^1, puis par un argument de densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2, on peut prolonger la transformée à L^2 (Fourier-Plancherel), l'avantage d'avoir la transformée de Fourier sur L^2 est que c'est un espace de Hilbert. On parlera ensuite de l'espace de Schwartz qui est stable par transformée de Fourier donc cela sera simple de définir la transformée de Fourier inverse. Puis on parlera de la fonction caractéristique qui est en fait qu'une variante de la transformée de Fourier pour les probabilités [5]. J'utilise comme convention

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx}$$

Il existe d'autres conventions (voir appendice)

Plan détaillé :

I - Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$
- 1) Définition
  - Définition
  - Exemple
  - Propriétés
  - Riemann Lebesgue
- 2) Convolution et dérivation
  - Lien entre la convolution et la transformée de Fourier
  - Lien entre la dérivation et la transformée de Fourier
  - Transformée de Fourier inverse

II - Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R})$
- 1) Dans $L^2(\mathbb{R})$
  - Fourier Plancherel
  - Théorème de densité
  - Formule d'inversion
- 2) Dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$
  - Définition des fonctions à décroissances rapides
  - Définition de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$
  - Stabilité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par transformée de Fourier
  - Formule de Poisson et Shannon

III - Fonction caractéristique
  - Définition $\varphi_X(t)$
  - Formule d'inversion de la fonction caractéristique
  - Lien avec les moments
  - Lien avec l'indépendance
  - Lien avec la convergence en loi
  - Application : Théorème Central Limite

5. il n'y a plus de signe "moins" dans la définition

Développements :

- Formule d'inversion de la fonction caractéristique
- Formule de Poisson et Shannon

Références :

♥♥♥♥♥ - [9] Mohammed EL AMRANI, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*
♥♥ - [19] Ahmed LESFARI, *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace*
♥♥♥ - [3] Philippe BARBE et Michel LEDOUX, *Probabilité*
♥♥ - [21] Jean-Yves OUVRARD, *Probabilités 2*

Leçon 260
Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

Rapport du jury :

Le jury attend des candidats qu'ils donnent la définition des moments centrés, qu'ils rappellent les implications d'existence de moments (décroissance des L^p). Les variables aléatoires à densité sont trop souvent négligées. Le candidat peut citer — mais doit surtout savoir retrouver rapidement — les espérances et variances de lois usuelles, notamment Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson, exponentielle, normale. La variance de la somme de variables aléatoires indépendantes suscite souvent des hésitations. Les inégalités classiques (de Markov, de Bienaymé-Chebyshev, de Jensen et de Cauchy-Schwarz) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite). La notion de fonction génératrice des moments pourra être présentée ainsi que les liens entre moments et fonction caractéristique.

Pour aller plus loin, le comportement des moyennes empiriques pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées n'admettant pas d'espérance pourra être étudié. Pour les candidats suffisamment à l'aise avec ce sujet, l'espérance conditionnelle pourra aussi être abordée.

Questions possibles :

- Les moments d'une variable aléatoire caractérisent-ils sa loi ?

  Réponse : Oui si la variable aléatoire est bornée, mais non dans le cas général ! La recherche de contre-exemples dans le cas non borné peut d'ailleurs faire l'objet d'un développement, dans cette leçon.

- Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que $\lim_{t \to +\infty} P(X \geq t) = 0$.

Plan détaillé :

I - Notion d'espérance
  1) Définition
    Variables centrées
    Lemme de transfert
  2) Calcul
    Variable discrète
    Variable continue
    Exemple de la loi de Cauchy sans espérance
  3) Propriétés
    Propriété de linéarité
    Inégalité de Jensen
    Inégalité de Markov
    Propriétés liées à l'indépendance

II - Moments d'une variable aléatoire
  1) Moments L^p

Hölder

Inclusion des L^p

Minkowski

2) Variance Covariance et indépendance

Définition Variance

Propriétés de la variance

Inégalité de Bienaymé Tchebychev

Définition de la covariance

Utilisation de l'indépendance

3) Fonction caractéristique et moments

Définition

Lien entre la fonction caractéristique et les moments

Formule d'inversion de la fonction caractéristique

III - Théorème Limite

1) Loi des grands nombres

Théorème

Monte Carlo

2) Théorème Central Limite

Théorème Central Limite

Développements :

- Formule d'inversion de la fonction caractéristique
- Théorème Central Limite

Références :

♥♥♥♥ - [3] Philippe BARBE et Michel LEDOUX, *Probabilité*

♥♥♥ - [21] Jean-Yves OUVRARD, *Probabilités 2*

Leçon 264
Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Rapport du jury :

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre variables aléatoires de Bernoulli, binomiale et de Poisson doit être discuté. Il peut être d'ailleurs intéressant de mettre en avant le rôle central joué par les variables aléatoires de Bernoulli.

Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières, devront être mises en évidence, comme par exemple la caractérisation de la convergence en loi, la notion de fonction génératrice. Pour aller plus loin, le processus de Galton-Watson peut se traiter intégralement à l'aide des fonctions génératrices et cette voie a été choisie par plusieurs candidats : cela donne un développement de très bon niveau pour ceux qui savent justifier les étapes délicates.

Pour aller beaucoup plus loin, les candidats pourront étudier les marches aléatoires, les chaînes de Markov à espaces d'états finis ou dénombrables, les sommes ou séries de variables aléatoires indépendantes.

Questions possibles :

- Pourquoi on ne peut pas truquer 2 dés à six faces pour que leur somme vérifie une loi uniforme ?

  Réponse : utiliser la fonction génératrice

- Montrer qu'une suite de variables aléatoires suivants des lois binomiales $\mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

Plan détaillé :

I - Variables aléatoires discrètes [11]

1) Définition

   Définition

2) Lois usuelles

   Bernoulli

   Binomiale

   Géométrique

   Poisson

   Hypergéométrique

3) Conditionnement

   Définition

   Formule de Bayes

II - Moments et indépendance

1) Espérance et variance

Définitions

Théorème de transfert

2) Indépendance

Définition

Lien avec l'espérance

III - Transformations usuelles

1) Fonctions génératrices [11]

Avec les variables aléatoires usuelles

Lien avec l'indépendance

2) Fonctions caractéristiques [11] [21]

Définition

Convergence en loi

Formule d'inversion de la fonction caractéristique

IV - Théorèmes Limites

Approximation d'une loi de Poisson par une suite de binomiales

Loi des Grands Nombres

Monté Carlo

Théorème Central Limite

Corollaire : Théorème de Moivre-Laplace

Développements :

- Formule d'inversion de la fonction caractéristique
- Théorème Central Limite

Références :

♥♥♥♥ - [3] Philippe BARBE et Michel LEDOUX, *Probabilité*

♥♥♥ - [21] Jean-Yves OUVRARD, *Probabilités 2*

♥♥♥♥ - [11] Dominique FOATA, Jacques FRANCHI et Aimé FUCHS, *Calcul des probabilités*

Leçon 265
Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

Rapport du jury :

Cette leçon est très riche ; c'est une leçon de synthèse qui doit permettre d'explorer de nombreux pans du programme. Évidemment, la leçon ne doit pas se cantonner au seul champ des fonctions usuelles (logarithme, exponentielle, trigonométriques, hyperboliques et réciproques). Le jury attend surtout d'un agrégé qu'il soit en mesure de présenter rapidement les définitions et les propriétés fondamentales de ces fonctions, qu'il sache les tracer sans difficultés, qu'il puisse mener l'étude aux bornes de leur domaine, ainsi que discuter leurs prolongements éventuels, leurs développements de TAYLOR ou en série entière, leurs applications au calcul intégral, les équations fonctionnelles associées ou formules particulières, etc. Le jury n'attend pas un catalogue mais plutôt un choix pertinent et réfléchi, avec des applications en probabilité, convexité, études de courbes, ou autour des développements asymptotiques. Les déterminations du logarithme complexe peuvent tout à fait mériter une discussion approfondie dans cette leçon et donner lieu à des développements de bon niveau, pouvant aller jusqu'à leur interprétation géométrique.

Le domaine des fonctions spéciales est très vaste. Il faut absolument éviter l'écueil d'une taxonomie fastidieuse et dépourvue de motivation ; il vaut bien mieux se concentrer sur des exemples restreints, mais fouillés, par exemple une étude approfondie (d'une) des fonctions Γ, ζ ou θ, leurs propriétés fonctionnelles, leurs prolongements, leur étude asymptotique aux bornes et les domaines d'applications de ces fonctions.

Il y a donc bien des manières, très différentes, de construire valablement cette leçon. Par exemple, on peut bâtir un exposé organisé selon des problématiques et des techniques mathématiques : suites et séries de fonctions, fonctions holomorphes et méromorphes, problèmes de prolongement, développements asymptotiques, calculs d'intégrales et intégrales à paramètres, transformées de FOURIER ou de LAPLACE, *etc.* Mais on pourrait tout aussi bien suivre un fil conducteur motivé par un domaine d'application :

- en arithmétique pour évoquer, par exemple, la fonction ζ et la distribution des nombres premiers,
- en analyse des équations aux dérivées partielles où les fonctions spéciales interviennent notamment pour étudier le problème de DIRICHLER pour le Laplacien ou l'équation des ondes,
- en probabilités où la loi normale et la fonction erreur sont évidemment incontournables mais on peut aussi évoquer les lois Gamma et Bêta, les fonctions de BESSEL et leurs liens avec la densité du χ^2 non centrée et celle de la distribution de VON MISES-FISHER ou plus simplement comme loi du produit de variables aléatoires normales indépendantes, la loi ζ et ses liens avec la théorie des nombres,...
- il est aussi possible d'évoquer les polynômes orthogonaux, leurs propriétés et leurs diverses applications, en physique (oscillateur harmonique et polynômes de HERMITE), en probabilités (polynômes de HERMITE pour les lois normales, de LAGUERRE pour les lois Gamma, de JACOBI pour les lois Bêta...), pour l'étude d'équations aux dérivées partielles ou pour l'analyse de méthodes numériques,
- en théorie des représentations de groupes avec les fonctions de BESSEL,
- en algèbre en abordant les fonctions p-elliptiques.

Là encore, le jury renouvelle sa mise en garde d'éviter de faire un catalogue qui s'avérerait stérile, il s'agit bien plutôt de se tenir à détailler l'un ou l'autre de ces points de vue. Au final, cette leçon peut être l'occasion de montrer un véritable investissement personnel, adossé aux goûts du candidat.

Questions possibles :

- Montrer que $\frac{2}{e} < 1$.

    Réponse : Indication : Démontrer et utiliser l'inégalité de convexité $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.

- Démontrer la formule de Stirling.

    Réponse : Indication : Utiliser les intégrales de Wallis.

- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
- Montrer que la fonction logarithme définie par une intégrale (ce qui est la définition historique du logarithme) correspond bien à l'application réciproque de l'exponentielle.
- Sur quel domaine se prolonge Γ ?

    Réponse : sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ sans zéros et avec des pôles d'ordre 1 en les entiers négatifs

- Sur quel domaine se prolonge ζ ?

    Réponse : sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ avec un pôle d'ordre 1 en 1

Motivations :

J'attaque cette leçon sous un angle de prolongement. On commence par prolonger l'exponentielle, le cosinus et le sinus sur le plan complexe, ce qui donne les fonctions usuelles. On s'intéresse aussi au logarithme sur le plan complexe, qui se comporte très différemment du logarithme népérien. En effet, il faut faire attention à son ensemble de définition. Ensuite je m'intéresse aux fonctions spéciales suivantes : la fonction Γ d'Euler, la fonction ζ de Riemann et la fonction Θ de Jacobi. On va voir le lien qu'elles ont entre elles et comment on peut les prolonger sur $\mathbb{C}$ en des fonctions méromorphes. La fonction Γ a été introduite par Euler lorsqu'il cherchait un prolongement de la factorielle des entiers à $\mathbb{R}$. La fonction ζ a été introduite par Riemann pour étendre les séries de Riemann, c'est lui qui conjecturera que les zéros non triviaux de ζ sont sur la droite verticale de partie réelle égale à $1/2$. De plus, la fonction ζ possède un lien avec les nombres premiers et aide à prouver le théorème des nombres premiers (équivalent en $+\infty$ du cardinal des nombres premiers). Quant à la fonction Θ, c'est normalement une fonction holomorphe bipériodique à deux variables utile dans la pratique en physique, mais on ne s'intéressera ici qu'à une restriction, ce qui nous donne une fonction holomorphe à une variable.

J'ai rédigé le plan de cette leçon (voir ici)

I - Fonctions usuelles et variables complexes [18]

1) Fonction usuelle

   Exponentielle

   Cosinus

   Sinus

2) Logarithme

   Inverse de l'exponentielle

   Argument continu

   Détermination principale du logarithme

Propriété : primitive de $\frac{1}{z}$.

3) Théorie de l'indice

Définition

Théorème de résidus

II - Fonction Gamma Γ [18]

Définition

Régularité

Relation de récurrence

Stirling [27]

Prolongement

$\boxed{\text{Formule des compléments}}$

Définition du produit infini

Formule de Weierstrass

Application à la loi Gamma en probabilité

III - Fonction Zeta ζ et fonction Theta Θ [18] [15]

Définition

Théorème $\zeta(z) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-z})^{-1}$

Définition de Theta $\Theta(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 u}$

$\boxed{\text{Formule de Poisson et fonction } \Theta}$

Propriétés de Theta

Théorème qui lie Θ, ζ et Γ

Les zéros triviaux de ζ

Conjecture de Riemann

Théorème des nombres premiers

Développements :

- Formule des compléments
- Formule de Poisson et fonction Θ

Références :

♥♥♥♥♥ - [18] Paul JOLISSAINT, *Fonctions d'une variable complexe, théorie de Cauchy élémentaire et applications*

♥♥♥ - [2] Eric AMAR et Etienne MATHERON, *Analyse complexe*

♥♥♥♥ - [15] Roland GROUX et Philippe SOULAT, *Les fonctions spéciales vues par les problèmes*

♥♥ - [27] François ROUVIÈRE, *Petit guide de calcul différentiel*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Grégoire ALLAIRE and Sidi Mahmoud KABER. *Algèbre linéaire numérique.* Ellipses, 2002.

[2] Eric AMAR and Etienne MATHERON. *Analyse complexe.* Cassini, 2004.

[3] Philippe BARBE and Michel LEDOUX. *Probabilité.* EDP Sciences, 2007.

[4] Vincent BECK, Jérôme MALICK, and Gabriel PEYRÉ. *Objectif Agrégation.* H & K, 2005.

[5] Marc BRIANE and Gilles PAGÈS. *Théorie de l'intégration.* Vuibert, 2012.

[6] Philippe CIARLET. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* Dunod, 2006.

[7] Jean COMBES. *Suites et séries.* PUF, 1995.

[8] Jean-Pierre DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentielles.* EDP Sciences, 2016.

[9] Mohammed EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels.* Ellipses, 2008.

[10] Mohammed EL AMRANI. *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions.* Ellipses, 2011.

[11] Dominique FOATA, Jacques FRANCHI, and Aimé FUCHS. *Calcul des probabilités.* Dunod, 2012.

[12] Serge FRANCINOU, Hervé GIANELLA, and Serge NICOLAS. *Oraux X-ENS, Algèbre 1.* Cassini, 2018.

[13] Xavier GOURDON. *Analyse.* Ellipses, 2008.

[14] Joseph GRIFONE. *Algèbre Linéaire.* Cépaduès, 2011.

[15] Roland GROUX and Philippe SOULAT. *Les fonctions spéciales vues par les problèmes.* Cepadues, 2009.

[16] Bertrand HAUCHECORNE. *Les contre-exemples en Mathématiques.* Ellipses, 2007.

[17] Francis HIRSCH and Gilles LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle.* Dunod, 1999.

[18] Paul JOLISSAINT. *Fonctions d'une variable complexe, théorie de Cauchy élémentaire et applications.* Ellipse, 2016.

[19] Ahmed LESFARI. *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace.* Ellipses, 2012.

[20] Ahmed LESFARI. *Équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles.* Ellipses, 2015.

[21] Jean-Yves OUVRARD. *Probabilités 2.* Cassini, 2000.

[22] Alfio QUARTERONI, Riccardo SACCO, and Fausto SALERI. *Méthodes Numériques.* Springer, 2007.

[23] Hervé QUEFFELEC. *Topologie*. Dunod, 2016.

[24] Hervé QUEFFELEC and Claude ZUILY. *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 2007.

[25] Edmond RAMIS, Claude DESCHAMPS, and Jacques ODOUX. *Cours de Mathématiques 3 : Topologie et éléments d'analyse*. Dunod, 1998.

[26] Jean-Etienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. EDP Sciences, 2004.

[27] François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 2009.

[28] Paul TOULOUSE. *Thèmes de probabilités et statistique*. Dunod, 1999.