152 — Déterminant. Exemples et applications

Cadre : E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I) L'application déterminant

1) Formes n-linéaires alternées

Def 1 : $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$ ev. $f : E_1 \times \dots \times E_n \to \mathbb{R}$ est forme n-linéaire si elle est linéaire selon chacune de ses variables.

Ex 2 : Si $\varphi_i \in E^*$ $\forall i$ $\Phi : \begin{array}{l} E^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) \end{array}$ est n-linéaire

Def 3 : Soit f une forme n-linéaire sur E (abus pour E^n). f est alternée si $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les x_i sont égaux.

f est antisymétrique si l'échange de deux vecteurs dans $(x_1, \dots, x_p)$ change le signe de f.

Prop 4 : f antisymétrique $\Leftrightarrow$ f alternée

Thm 5 : L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$ev de dimension 1. De plus, il existe une et une seule forme n-linéaire alternée prenant la valeur 1 sur une base donnée de E.

Def 6 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E, on appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$ la seule forme n-linéaire alternée valant 1 sur $(e_1, \dots, e_n)$

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)}$$

Thm 7 : Soient $x_1, \dots, x_n \in E$. Il y a équivalence entre

(i) les vecteurs $x_1 \dots x_n$ sont liés

(ii) Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\det_{\mathcal{B}}(x_1 \dots x_n) = 0$

(iii) il existe $\mathcal{B}$ telle que $\det_{\mathcal{B}}(x_1 \dots x_n) = 0$

Def 8 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle déterminant de A le déterminant des vecteurs colonnes de A dans la base canonique, on l'écrit

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Prop 9 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$\det(A) = \det({}^tA)$ $\quad \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ si $A \in GL_n(\mathbb{K})$

2) Régularité du déterminant

Prop 10 : L'application $\begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \det(A) \end{array}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et

$$d\det(A) \cdot H = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X) H)$$

on introduira la comatrice plus tard

Application 11 : Par la continuité du déterminant, $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert

II) Calcul du déterminant

Prop 12 : Si A est diagonale, $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Prop 13 : Si A est triangulaire, alors

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \text{où } (a_{i,j}) \text{ coefficient de } A$$

Prop 14 : On ne change pas le déterminant d'une matrice A en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes

Prop 15 : Si $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ matrice par blocs

$$\det M = \det(A) \det B$$

Def 16 : Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$ on appelle mineur de $a_{i,j}$ noté $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de A

On appelle $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ le cofacteur de $a_{i,j}$

Ex 17 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \Delta_{1,2} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$

Prop 18 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (annexe)

Le développement selon la $j^{ème}$ colonne donne

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}\, a_{i,j}$$

le développement selon la $i^{ème}$ ligne donne

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}\, a_{i,j}$$

Def 19 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On appelle comatrice de A notée $\mathrm{com}(A)$ la matrice des cofacteurs

Prop 20 : Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = ad - bc$

Ex 21 : $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2\times 1 - 1\times 1 = 1$

Prop 22 (Règle de Sarrus) : Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\det(A) = aei + dhc + gbf - ceg - fha - bdi$$

Ex 23 : Annexe

Prop 24 (Van Der Monde) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$

Alors $\det(A) = \prod_{i<j} (a_i - a_j)$

Prop 25 (déterminant circulant)

Si $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$, on pose $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$

et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

Alors $\det(A) = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega^i)$

Application 26 : Soit $z^{(0)} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$

La suite définie par

$$z^{(k+1)} = \left(\frac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2}, \dots, \frac{z_{n-1}^{(k)} + z_n^{(k)}}{2}, \frac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2}\right)$$

converge vers l'isobarycentre de $z^{(0)}$

DEV 1

III Déterminant en algèbre linéaire

Def 27 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on appelle polynôme caractéristique de A noté χ_A, le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par

$$\chi_A(X) = \det(X I_n - A)$$

Prop 28 : λ est valeur propre de A ssi $\chi_A(\lambda) = 0$

Prop 29 : Si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples alors A est diagonalisable.

Ex 30 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Car $\chi_A = (X-1)(X-3) - 8 = (X-5)(X+1)$

Prop 31 : Si A est nilpotente alors $\chi_A = X^n$

Prop 32 : Si $A = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ on note $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$

Alors $\chi_A = P$

Thm 33 (Cayley Hamilton) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
Alors $\chi_A(A) = 0$

IV Le déterminant dans d'autres domaines

1) Changement de variables

Def 34 (Jacobien) Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ $\mathcal{C}^1$
on appelle Jacobien de φ en u noté $J\varphi(u)$
$\det\left(\frac{\partial \varphi_i(u)}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ où φ_i sont les composantes de φ

Thm 35 : Soit φ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme entre deux ouverts Δ et D de $\mathbb{R}^d$
Si $f : D \to \mathbb{K}$ λ intégrable sur D
alors $(f \circ \varphi)|J\varphi|$ est λ intégrable sur Δ
et $\int_D f(x)\,dx = \int_\Delta f\circ\varphi(u)\,|J\varphi(u)|\,du$

Ex 36 : $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{s}\right)^x \frac{1}{t} e^{-(t+s)}\,dt\,ds = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(u+1)} e^{-v}\,du\,dv$

2) Inégalité d'Hadamard

Rappel 37 (Thm des extrema liés) Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$
Soient $f, g_1, \dots, g_{n-k} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$
$\Gamma = \{x \in U,\ g_i(x) = 0\ \forall i \in \{1, \dots, n-k\}\}$
Si $f|_\Gamma$ admet un extremum local en x_0 et que la famille $dg_i(x_0)$ est libre
Alors il existe $(\lambda_i)_1^{n-k} \in \mathbb{R}^{n-k}$, $df(x_0) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i\, dg_i(x_0)$

Prop 38 : Si $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$
$|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\|\,\|x_2\| \cdots \|x_n\|$

DEV 2

3) Volume

Thm 39 : L'aire $\mathcal{A}(v, w)$ du parallélogramme engendré par v et w des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est égale à la valeur absolue de $\det(v, w)$
i.e. $\mathcal{A}(v, w) = |\det(v, w)|$

Thm 40 : Soient $v_1, \dots, v_n$ n vecteurs de $\mathbb{R}^n$
Le volume du parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_n$, ie l'ensemble
$\{z \in \mathbb{R}^n,\ z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad 0 \leq \lambda_i < 1\}$
est $\mathrm{vol}(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$

Annexe:

Prop 18:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{1,k} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Prop 22:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2\times3\times2 + 1\times5\times1 + 4\times1\times1$$
$$- 1\times3\times4 - 1\times5\times2 - 2\times1\times1$$
$$= 12+5+4-12-10-2$$
$$= -3$$