Colle semaine 11 MP

Pierre Le Scornet

11 décembre 2020

Exercice 1 - *

Soit E un evn. On définit pour $A \subset E$ son adhérence $\overline{A}$ comme l'ensemble des limites des suites convergentes à valeurs dans A (pour la norme de E). On admettra que si une suite converge, sa norme converge vers la norme de sa limite.
1) Montrer que la boule $\mathcal{B}(c, r)$ ouverte de centre c et de rayon r est égale à $c+\mathcal{B}(0, r)$. (on admettra que le résultat est le même en boule fermée)
2) Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et de même rayon.

Exercice 2 - *

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, et f un fonction k-lipschitzienne de E vers E.
1) Montrer que si f admet un point fixe et $k < 1$, ce point fixe est unique. Est-ce toujours vrai si $k = 1$?
2) Soit u une suite d'itérés de f : $u_0 \in E$ et pour tous $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Supposons que f admette un point fixe. Montrer que pour tous $k \in \mathbb{N}$, $\|u_n - l\| \leq k^n \|u_0 - l\|$. Que peut-on dire si $k < 1$?
3) Proposer une méthode numérique approchée convergeant vers une solution $X \in \mathbb{R}^n$ de $X = AX + B$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B \in \mathbb{R}^n$ tels que $X \mapsto AX$ est k-lipschitzienne avec $k < 1$. *On utilisera le résultat suivant : si $\rho = \max_{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M)} |\lambda| < 1$, alors $I - M$ est inversible.*

Exercice 3 - *

On se place dans l'espace $\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonction avec $f_n : x \mapsto x^n$.
1) Montrer que la suite converge pour la norme 1.
2) Nous allons montrer par l'absurde qu'elle ne converge pas pour la norme ∞.
a) Supposons qu'elle converge. Déterminer, en fonction de x, la valeur de $f(x)$.
b) Expliquer où est la contradiction.
3) Montrer que l'application linéaire $\phi : f \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R}) \mapsto f(1)$ n'est pas continue pour la norme 1.

Exercice 4 - **

On munit $\mathbb{C}[X]$ de la norme 1 sur les coefficients : $\|P\| = \sum_{i=0}^{\deg P} p_i$.
1) Soit P un polynôme unitaire, λ une racine de P. Montrer que $\|\lambda\| \leq \|P\|$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons P de degré n. Soit P_m une suite de polynômes unitaires de degré n

convergeant vers P.
a) Montrer que pour toute racine λ de P, il existe une suite de nombres complexes $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tels que α_m est une racine de P_m et que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_m = \lambda$.
b) Montrer que l'on peut écrire $P_m = (X-\lambda_{1,m})\dots(X-\lambda_{n,m})$ tels que $\lambda_{i,m} \to_{m\to+\infty} \lambda_i$.

Exercice 5 - **

Soit A une sous-partie non vide de E un evn. Soit $f : A \mapsto \mathbb{R}$ k-lipschitzienne.
1) Pour tout $x \in E$, on note $\Delta_x = \{f(a)+k\|x-a\|, a \in A\}$. Discuter de l'existence de $g(x) = \inf \Delta_x$.
2) Montrer que g est un prolongement k-lipschitzien de f à E tout entier.

Exercice 6 - *

Soient E, F deux evn. Pour $f : E \to F$ linéaire, montrer que ces assertions sont équivalentes :
- f est continue pour $\|\cdot\|$,
- f est continue pour $\|\cdot\|$ en 0,
- f est bornée sur la boule unité fermée,
- f est lipschitzienne,
- f est uniformément continue.

Solution 1

1) Par une simple suite d'équivalence, en utilisant la définition des boules.
2) On note $B = \mathcal{B}(c,r)$, $B' = \overline{\mathcal{B}}(c,r)$. D'une part, on a $B \subseteq \overline{B}$ (en prenant des suites constantes), et plus généralement $B' \subseteq \overline{B}$: soit $x \in B'$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n-1}{n}(x-c) \in \mathcal{B}(0,r)$ et tend vers $x-c$, donc x est la limite de la suite $\frac{n-1}{n}(x-c)+c$ d'éléments de B et donc $B' \subseteq \overline{B}$. D'autre part, soit $x \in \overline{B}$, et x_n une suite de B convergeant vers x. Par continuité de la norme (ce que j'ai admis), puisque $\|x_n - c\| < r$, en passant à la limite sur n on a $\|x-c\| \le r$, donc $x \in B'$.

Solution 2

1) Supposons que $x, y \in E$ sont des points fixes de f, donc $f(x) - f(y) = x - y$. Puisque f est k-lipschitzienne, on a $\|x-y\| = \|f(x)-f(y)\| \le k\|x-y\|$, or $k < 1$ donc $\|x-y\| = 0$ et $x = y$.
2) a) On va montrer la propriété par récurrence sur n :
- Pour $n = 0$, on a $\|u_0 - l\| = k^0\|u_0 - l\|$.
- Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n - l\| \le k^n\|u_0 - l\|$. Alors on a $\|u_{n+1} - l\| = \|f(u_n) - f(l)\| \le k\|u_n - l\| \le k.k^n\|u_0 - l\|$.

b) Si $k < 1$, puisque $\|u_0 - l\|$ est une constante et que $k^n \to 0$, on a $\|u_n - l\| \to 0$ i.e. $u_n \to l$. Ainsi, toute suite itérée de f converge vers son point fixe. 3) On attend ici une suite X_n convergeant vers une solution de $X = AX + B$. Pour cela, on va prendre $X_0 \in \mathbb{R}^n$, et définir la suite X_n comme la suite des itérés de X_0 par $X \mapsto AX + B$. Puisque A est k-lipschitzienne, $k < 1$, alors toute valeur propre $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ vérifie pour X un vecteur propre associé $\|AX\| = |\lambda|\|X\| \le k\|X\|$ donc $|\lambda| < 1$, donc $\rho < 1$. Ainsi, on peut appliquer le résultat donné, et on a $I - M$ inversible et donc l'équation $X = AX+B$ admet une solution. Ainsi, l'application $X \mapsto AX+B$ est k-lipschitzienne (avec $k < 1$, et les B s'annulent dans la définition de lipschitzienne). La suite itérée converge donc vers l'unique point fixe de $X \mapsto AX + B$, i.e. la solution demandée.

Solution 3

1) $\|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to 0$
2) a) La convergence uniforme implique la convergence simple : $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ et $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$, donc $f_n(x) \to f(x)$. Or pour $0 \leq x < 1$, $x^n \to 0$, et pour $x = 1$, $x^n = 1 \to 1$. Ainsi, $f = \delta_1$.
b) La contradiction vient du fait que f n'est pas continue : on dit que l'espace n'est pas complet pour la norme infinie.

Solution 4

1) On écrit $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$. Alors on a $\|P\| = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \geq 1$, donc si $\lambda \geq 1$ c'est terminé. Sinon, $P(\lambda) = 0$ donc $\lambda = -a_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{\lambda} - \cdots - \frac{a_1}{\lambda^{n-2}} - \frac{a_0}{\lambda^{n-1}}$. Ainsi, puisque $|\lambda| > 1$, on a donc $|\lambda| \leq 1 + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| = \|P\|$.
2)a) On note $(\alpha_{i,m})_i$ les racines de P_m. On veut montrer que $\min_{1\leq i\leq m} |\alpha_{i,m} - \lambda|$ tends vers 0. On va le montrer par l'absurde :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N, \exists m \geq N, \forall i \in [\![1;n]\!], |\alpha_{i,m} - \lambda| \geq \varepsilon$$

Il existe donc une extractrice φ telle que $\forall m \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![1;n]\!], |\alpha_{i,\varphi(m)} - \lambda| \geq \varepsilon$.
La suite P_m converge donc est bornée, donc par le 1 la suite $\alpha_{\varphi(m)} = (\alpha_{1,\varphi(m)}, \ldots \alpha_{n,\varphi(m)})$ est bornée. Puisque la suite $(\alpha_{\varphi(m)})_m$ est bornée en dimension finie, il existe une sous-suite qui converge $(\alpha_{\varphi\circ\psi(m)})_m$ vers $\alpha \in \mathbb{C}^n$.
Résumons : on a trouvé une extraction sur m des $\alpha_{i,m}$ qui converge. Or on a :

$$P = \lim_{m\to+\infty} P_{\varphi\circ\psi(m)} P = \lim_{m\to+\infty} \prod_{i=1}^{m} (X - \alpha_{i,\varphi\circ\psi(m)}) = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

Ainsi, $\lambda \in \{\alpha_1 \ldots \alpha_n\}$, ce qui contredit la supposition.
b) On va procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, avec le cas $n = 1$ évident. Supposons le résultat vrai au rang $n - 1$, et considérons la racine λ_n de P. D'après la question précédente, on prend β_m une suite de racines de P_m convergeant vers λ_n, et on écrit $Q_m(X - \beta_m) = P_m$ et $Q(X - \lambda_n) = P$. Alors on applique l'hypothèse de récurrence sur Q en remarquant que $Q_m \to Q$ (pour le montrer, on écrit les coefficients de Q_m comme des polynômes en les coefficients de Q_m et α_m). On obtient les $(\lambda_{1,m} \ldots \lambda_{n-1,m})$ qui converge vers $(\lambda_1, \ldots \lambda_{n-1})$ et donc $(\lambda_{1,m} \ldots \lambda_{n,m} := \beta_m) \to (\lambda_1 \ldots \lambda_n)$, et on a fini.

Solution 5

1) On sait que $\forall a \in A, |f(a)| \leq k\|x - a\|$, donc $f(a) \geq -k\|x - a\|$. Ainsi, tous les éléments de Δ_x sont positifs et Δ_x est non vide (car A l'est), donc il admet une borne inférieur.
2) D'abord, montrons que c'est un prolongement : soit $x \in A$. Alors $g(x) = \inf \Delta_x$. Or pour tout $a \in A$, on a $(f(a) + k\|x - a\|) - f(x) \geq -k\|a - x\| + k\|x - a\| = 0$. Ainsi, $\inf \Delta_x \geq f(x)$, et cette borne est atteinte en $a := x$. Ainsi, $g(x) = f(x)$. Pour montrer que cette fonction g est k-lipschitzienne, il suffit de prendre $x, y \in E$. Soient a_n, b_n deux suites de A tels que $f(a_n) + k\|x - a_n\| \to g(x)$ et $f(b_n) + k\|x - b_n\| \to g(y)$. Alors, on a :

$$g(x) \leq f(b_n) + k\|x - b_n\| \leq f(b_n) + k\|y - b_n\| + k\|x - y\| \to g(y) + k\|x - y\|$$

et donc $g(x)-g(y) \leq k\|x-y\|$. En échangeant les rôles de x et y, on obtient $g(y)-g(x) \leq k\|x-y\|$, et donc $|g(y)-g(x)| \leq k\|x-y\|$.

Solution 6

On va montrer un cycle d'implications :

— Si f est continue, elle l'est en 0.

— Si f n'est pas bornée sur la boule unité fermée, alors il existe une suite d'éléments de cette boule $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dont la norme de leur image par f diverge (on prendra une suite x_n telle que f ne les annule jamais). Alors si on note $y_n := \frac{x_n}{\|f(x_n)\|_F}$, alors $\|f(y_n)\|_F = \frac{1}{\|f(x_n)\|_F}\|f(x_n)\|_F = 1 \not\to 0$, mais $y_n \to 0$ puisque $\|y_n\|_E = \frac{\|x_n\|_E}{\|f(x_n)\|_F} \leq \frac{1}{\|f(x_n)\|_F}$. Ainsi, f n'est pas continue en 0.

— Soit $x, y \in E$, on note M la borne de f sur la boule précédente. Alors $\|f(x)-f(y)\|_F = \|f(x-y)\|_E = \|x-y\|_E\|f(\frac{x-y}{\|x-y\|_E})\|_F \leq \|x-y\|_E M$, ce qui montre la lipschitzianité.

— Soit $\varepsilon > 0$, notons k la constante de Lipschitz de f. Alors pour tous $x, y \in E$, on a $\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x-y\|_E$. Ainsi, pour $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$, et pour tous $x, y \in E$ tels que $\|x-y\|_E < \eta$, alors $\|f(x)-f(y)\|_F < k\eta = \varepsilon$, ce qui montre l'uniforme continuité.

— Si f est uniformément continue elle est continue.