Colle semaine 12 MP

Pierre Le Scornet

8 janvier 2021

Exercice 1 - *

1) Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
2) Soit $\mathbb{Q}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels. Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.
3) On dit que $x \in \mathbb{R}$ est algébrique s'il est racine d'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$. Montrer qu'il existe des nombres non algébriques.

Exercice 2 - *

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer si les familles suivantes sont sommables : $\left(\frac{1}{p^\alpha}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$, $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$

Exercice 3 - *

On définit la fonction $f : x \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.
1) Montrer que la fonction f est bien définie.
2) Établir que pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, $f(x)f(y) = f(x+y)$.

Exercice 4 - **

Soit $f : x \mapsto \frac{3x+7}{(x+1)^2}$.
1) Décomposer f en éléments simples.
2) En déduire que f est développable en série entière en 0, et préciser le domaine de validité de ce développement.
3) a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note g la somme de cette série dans $]-R;R[$. Quelle est la classe de continuité de g ? Exprimer (en le montrant) la valeur de a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
b) En déduire le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.

Exercice 5 - **

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $(p_1, \dots p_k)$ ses facteurs premiers On tire un $x \in [\![1;n]\!]$ selon une loi uniforme. Pour $m \in [\![1;n]\!]$, on note A_m l'évènement $m|x$, et on note B l'évènement x et n premiers entre eux.
1) Exprimer B en fonction des A_{p_j}.
2) Pour $m|n$, calculer la probabilité de A_m.
3) Montrer que $A_{p_1} \dots A_{p_k}$ sont mutuellement indépendants.
4) En déduire la probabilité de B.

5) En déduire que pour $\phi(n)$ le nombre d'entiers $1 \leq m \leq n$ premiers avec n, on a $\phi(n) = n\prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{1}{p_i})$.

Exercice 6 - **

Un avion comporte $n \geq 2$ sièges, et n passagers vont s'y installer à leur place attitrée. Le premier passager s'installe à une place au hasard, et les suivants s'installent à leur place sauf si elle est prise, à une place libre de façon uniforme sinon. Déterminer la probabilité que le dernier passager s'installe à sa place.

Solution 1

$\mathbb{Q}$ est dénombrable puisqu'il est en surjection avec une sous-partie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable. D'une part, pour $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{Q}_{\leq n}[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n est immédiatement en bijection avec $\mathbb{Q}^{n+1}$, il est donc dénombrable. D'autre part, $\mathbb{Q}[X] = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Q}_{\leq n}[X]$, il est donc une union dénombrable de dénombrables. Ainsi, $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable. Enfin, l'ensemble des nombres algébriques est égal à $\cup_{P\in\mathbb{Q}[X]} racine(P)$, une union dénombrable d'ensembles finis non vides, donc il est dénombrable.

Solution 2

On remarque que ces trois sommes sont à termes positifs.
1) C'est du cours.
2) Pour la première, on va utiliser le théorème de sommation par paquets : on a $I = (\mathbb{N}^*)^2$, on va prendre $I_n = \{(p, q) \in I, p+q = n\}$. Par le théorème de sommation par paquets, la première famille est sommable ssi $\left(\frac{|I_n|}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est. Or $|I_n| = (n - 1)$, donc le problème revient à la convergence de la série des $\frac{n-1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}$. La famille est donc sommable ssi $\alpha > 2$.

Solution 3

1) Pour $x = 0$ c'est évident, et pour $x \neq 0$ par la règle de d'Alembert on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0$, donc la série converge absolument.
2) On écrit donc le produit de sommes de séries comme somme d'une série de Cauchy :

$$f(x)f(y) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{y^l}{l!}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}\right)$$

, donc

$$f(x)f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = f(x+y)$$

Solution 4

1) $f(x) = \frac{3}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2}$.
2) Chacun de ces termes est DSE, donc la somme f l'est. On peut l'écrire explicitement :

$$f(x) = 3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(4n+7)(-1)^n x^n$$

Ce DSE ne converge que dans $]-1;1[$ (c'est vrai dès que les coefficients de la série entière sont au plus polynômiaux en valeur absolue).
3) a) Une série entière est $\mathcal{C}^\infty$ dans $]-R;R[$. Ainsi, on peut calculer leurs dérivées successives. Par récurrence, on montre que :

$$g^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\dots(n+p)a_{n+p}x^n$$

et donc que $g^p(0) = a_p \frac{(p)!}{1!}$ donc $a_p = \frac{g^{(p)}(0)}{p!}$.
b) On va utiliser la formule de Taylor-Young : $f(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p + o(x^3)$ en 0. Or ces coefficients sont aussi les coefficients du développement limité, donc $f(x) = 7 - 11x + 15x^2 - 19x^3 + o(x^3)$.

Solution 5

1) n est premier avec x ssi tous les facteurs premiers de n sont premiers avec x, i.e. ne divisent pas x. Ainsi, $B = \overline{A_{p_1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{p_k}}$
2) Soit $m|n, n = km$. Alors les nombres divisibles par m inférieurs ou égaux à n sont $m, 2m, \ldots km$. Ainsi A_m est de cardinal k et $P(A_k) = \frac{k}{n} = \frac{1}{m}$.
3) Puisque les p_i sont premiers entre eux deux à deux, alors tous les p_i divisent x ssi leur produit divise x, i.e. $A_{p_1} \cap \cdots \cap A_{p_k} = A_{p_1 \ldots p_k}$. En passant à P, on obtient à droite $\frac{1}{p_1 \ldots p_k}$, i.e. $\prod_{i=1}^{k} P(A_{p_i})$.
4) Si des évènements sont mutuellement indépendants, alors leurs complémentaires le sont aussi. Ainsi, $P(B) = P(\overline{A_{p_1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{p_k}}) = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.
5) $P(B) = \frac{\phi(n)}{n}$, d'où le résultat demandé.

Solution 6

Soit p_n la probabilité cherchée G l'évènement associé, A_k l'évènement "le premier passager s'installe à la $k$ième place. On va déterminer p_n par récurrence. Sans perte de généralité, on va attribuer la place k au passager numéro k. Pour $n = 2$, $p_1 = \frac{1}{2}$. Pour $n \geq 2$, par la formule des probabilités totales, $p_n = P(G) = \sum_{i=0}^{n} P(A_k)P(G|A_k)$.

- On a $P(G|A_1) = 1$ (le premier passager prend la bonne place, donc tous les autres aussi).
- $P(G|A_n) = 0$ (de toute façon, la place n sera prise).
- Si le premier passager s'installe en $2 \leq k \leq n-1$, alors les passagers $2 \ldots k-1$ s'installent à leur place. Ensuite, il reste $n-k+1$ passagers, le siège 1 et les sièges $k+1 \ldots n$. Ainsi, le passager k va choisir au hasard une place : en renommant la place 1 comme la place k, on se retrouve dans la situation initiale avec $n' = n-k+1$. Ainsi, $P(G|A_k) = p_{n-k+1}$.

Ainsi, $p_n = \sum_{i=2}^{n-1} P_{A_k} p_{n-k+1} + P_{A_1} + 0 = \frac{n-2}{2n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ par récurrence forte.