Cours 1

Énoncer et démontrer le théorème de la double limite.

Cours 2

Énoncer et démontrer le théorème d'approximation par des fonctions en escalier.

Cours 3

Définir la convergence normale. Montrer qu'elle implique la convergence absolue en tout point et la convergence uniforme sur le domaine de définition.

Exercice 1 - *

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I. Montrer la véracité ou non des assertions suivantes si elle converge simplement ou uniformément vers f.
1) Si les f_n sont croissantes, alors f aussi,
2) Si les f_n sont strictement croissantes, alors f aussi,
3) Si les f_n sont périodiques de période T, alors f aussi,
4) Si les f_n sont continues, alors f aussi (sans démonstration, mais avec un contre-exemple éventuellement).

Exercice 2 - *

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.
1) Donner le domaine de définition de f (dans $\mathbb{R}$).
2) Déterminer la continuité éventuelle de f en $]1; +\infty[$. Déterminer ses limites en 1 et $+\infty$. (*on utilisera les critères de majoration des séries alternées et de leurs restes*)

Exercice 3 - *

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n(x) = nx^2 e^{-\sqrt{n}x}$.
1) Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2) Montrer qu'elle ne converge pas normalement.
3) Converge-t-elle normalement sur tout intervalle de la forme $[a; +\infty[, a > 0$?
4) Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4 - **

Soit $f : \mathbb{R} : \mathbb{R}$ une fonction et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f.
1) Justifier qu'à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$ pour tous $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.
2) Que peut-on dire de $P_n - P_N$?
3) En déduire que f est un polynôme.

Exercice 5 - **

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $u_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$ pour $n \geq 1$.
1) Montrer que la série des u_n converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.. On notera $S(x)$ sa somme.
2) Montrer que S est continue et monotone, et déterminer sa limite en $+\infty$.
3) Justifier que S admet une limite (finie ou infinie) en 0, puis démontrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{x\to 0} S(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$, et conclure.

Exercice 6 - **

Soit $\zeta : x \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$.
1) Déterminer le domaine de définition de cette somme.
2) Montrer qu'elle y est décroissante et continue.
3) Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.
4) Montrer l'inégalité :

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^s} dx \leq \frac{1}{k^s}$$

En déduire un équivalent de ζ en 1^+.
5) Montrer que la fonction ζ est convexe.
6) Tracer la courbe de la fonction ζ.

Solution 1

Remarquons que si l'on montre le résultat pour la cv simple, il est vrai pour la cv uniforme. Ainsi :
1) Si f_n est croissante, alors pour tout $x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ et en passant à la limite simple, on a $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. On a donc l'assertion vraie dans les deux cas.
2) Le contre-exemple $f_n(x) = \exp(nx)$ sur $[-\infty; -1[$ tend simplement et uniformément vers 0 qui n'est pas strictement croissante.
3) Supposons que f_n est T-périodique, alors on a $\forall x \in I, \forall k \in \mathbb{Z}, f_n(x + kT) = f_n(x)$. En fixant x, k et en passant à la limite simple en n, on obtient donc $f(x + kT) = f(x)$, et f est bien T-périodique.
4) C'est très important de connaître un tel exemple de suite de fonctions continues dont la limite ne l'est pas : par exemple, $x \mapsto x^n$ sur $[0; 1]$. Dans le cas uniforme, c'est vrai par le cours.

Solution 2

1) Pour que le ln soit défini, on va donc prendre $x > 0$, et pour que la fraction existe $\forall n \in \mathbb{N}, xn \neq 1$, i.e. $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{\frac{1}{p}, p \in \mathbb{N}^*\}$. Dans ce cas, par le critère de convergence des séries alternées, on a la convergence simple sur cet ensemble.
2) Par décroissance de $\frac{1}{\ln(nx)}$ selon n, et par la majoration des séries alternées, on a pour $x > 1$ $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\ln x}$, et on $\lim_{+\infty} f = 0$.
Pour la continuité, on sait que chaque terme est continu en x sur $]1; +\infty[$, et par le critère de majoration des restes des séries alternées on a $\|R_n\|_{\infty,]1; +\infty[} \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$. Ainsi, on a la convergence uniforme du reste vers 0 et donc la convergence uniforme de la série de fonctions. Ainsi la somme est continue.
Pour la limite en 1^+, on va utiliser le théorème d'interversion des limites puisqu'on a la convergence uniforme de la série de fonctions. Ainsi, la limite en 1^+ est égale à la somme des limites, mais en $n = 1$ cette limite est $+\infty$ (et tous les termes sont positifs) donc la limite de f en 1 est $+\infty$.

Solution 3

1) La convergence simple se déduit naturellement pour $x > 0$ de $3\ln(n) \leq \sqrt{n}$ à partir d'un certain rang, et donc que $u_n(x) = O(x^2/n^2)$. Pour $x = 0$, c'est la série à termes nulles qui converge.
2) On prend $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, et l'on obtient $u_n(x_n) = e^{-1}$, d'où $\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \geq e^{-1}$.
3) On va écrire $u_n(x) = g(\sqrt{n}x)$, avec $g : y \mapsto y^2 e^{-y}$. On peut calculer sa dérivée : $g'(y) = (2y - y^2)e^{-y}$ et on peut rapidement montrer qu'elle est décroissante à partir de $y = 2$, i.e. u_n est décroissante à partir de $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Ainsi, pour $n \geq \frac{4}{a^2}$, on a $a \geq \frac{2}{\sqrt{n}}$ et donc $0 \leq u_n(x) \leq u_n(a)$ par décroissance de u_n à partir de $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Or $u_n(a)$ est le terme d'une série convergente, donc la série des u_n converge normalement sur $[a; +\infty[$.
4) On va montrer que le reste ne converge pas uniformément. D'une part, on sait que $R_n(x) = \sum_{n+1}^{+\infty} u_n(x) \geq u_{n+1}(x)$. Or par la question 2), on sait que la norme infinie de u_n est supérieure ou égale à e^{-1} donc le reste ne converge pas uniformément vers 0.

Solution 4

1) C'est le critère de Cauchy de la convergence des suites : si l'on veut le prouver sans le mentionner, on peut juste prendre $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|P_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq N$. Par l'inégalité triangulaire on obtient le résultat.
2) Puisque en $+\infty$, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré, le fait que le polynôme $P_n - P_N$ soit borné est équivalent au fait d'être constant. Ainsi, $P_n - P_N = c_n$, $c_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \geq N$.
3) Ainsi, $f - P_N = \lim(P_n - P_N)$ est une constante, donc f est un polynôme.

Solution 5

1) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{1}{n+n^2x} \sim \frac{1}{n^2x}$ dont la somme converge, d'où la convergence simple.
2) Puisque les fonctions u_n sont décroissantes, sa somme l'est aussi. Ainsi, pour $x \in [a; +\infty[$, $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n+n^2a}$ dont la somme converge, donc

la série de fonctions converge normalement sur $[a; +\infty[$, donc elle y est continue comme somme (normale) de fonctions continues.
Puisque la convergence est normale, donc uniforme, sur $[1; +\infty[$, on peut inverser les limites : $\lim_{+\infty} \sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \lim_{\infty} u_n = 0$.
3) Puisque la fonction S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle admet une limite en 0 qui est soit finie sur $+\infty$.
Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors, par positivité des termes, on a $S(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+n^2x}$, donc en passant à la limite en 0, on a $\lim_0 S \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. Or cette somme diverge vers $+\infty$, donc $\lim_0 S = +\infty$.

Solution 6

1) C'est une série de Riemann. Ainsi, le domaine de définition de ζ est $]1; +\infty[$.
2) Chaque terme de la somme est décroissant, donc ζ est décroissante. Pour montrer la continuité, on remarque que chaque terme est continu et on va montrer que la série converge localement uniformément. Sur $[a; +\infty[, a > 1$, par décroissance on a $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^a}$, dont la série converge. Ainsi, on a la convergence localement uniforme, donc la continuité de la fonction ζ.
3) On sait que la série converge uniformément sur $[2; +\infty[$. Or chaque terme converge vers 0 en $+\infty$ (sauf le premier qui est constant égal à 1), on peut appliquer le théorème d'interversion des limites ce qui nous donne $\lim_{+\infty} \zeta = 1$.
4) Cette inégalité s'obtient par la décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x^s}$, et en l'intégrant entre k et $k+1$. En la sommant de $k = 1$ à $+\infty$, on obtient que $\zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s)$, et donc $\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$. Les deux côtés de cet encadrement sont équivalents à $\frac{1}{s-1}$, donc la fonction ζ aussi.
5) La fonction $s \mapsto \frac{1}{n^s}$ est convexe. Si l'on regarde la définition de la convexité, on peut la sommer et la passer à la limite, donc la fonction ζ est convexe. Sinon, on peut montrer que ζ est $\mathcal{C}^2$, en déduire que la dérivée seconde est la somme des dérivées secondes, qui sont toutes positives donc la fonction est convexe.

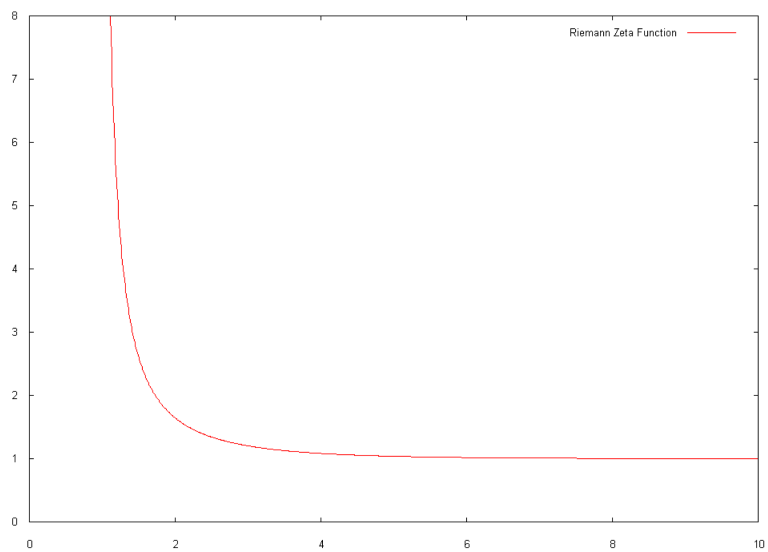

FIGURE 1 – Fonction ζ

6)