# Colle semaine 13 MP*

Pierre Le Scornet

22 janvier 2021

**Cours 1**

Énoncer et démontrer le théorème d'interversion limite intégrale. Énoncer le théorème de convergence des fonctions $\mathcal{C}^k$.

**Cours 2**

Énoncer et démontrer le théorème d'approximation par des fonctions en escalier.

**Cours 3**

Montrer le théorème sur le caractère $\mathcal{C}^1$ d'une limite/somme de fonctions $\mathcal{C}^1$.

**Exercice 1 - ***

Soit $f : \mathbb{R} : \mathbb{R}$ une fonction et $(P_n)$ une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers $f$.
1) Justifier qu'à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$ pour tous $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.
2) Que peut-on dire de $P_n - P_N$ ?
3) En déduire que $f$ est un polynôme.

**Exercice 2 - ***

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[0;1]$ par $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.
1) Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2) Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ et la limite de $I_n$. En déduire que $f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0;1]$.
3) Démontrez le directement.

**Exercice 3 - ***

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n(x) = nx^2 e^{-\sqrt{n}x}$.
1) Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2) Montrer qu'elle ne converge pas normalement.
3) Converge-t-elle normalement sur tout intervalle de la forme $[a;+\infty[, a > 0$ ?
4) Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 4 - ***

1) Montrer que $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a+e^b}{2}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que $t \mapsto \ln(\ln t)$ est concave sur $]1; +\infty[$.
3) En déduire que $\forall a, b > 1, \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \ln b}$.

**Exercice 5 - ****

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Supposons que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Montrer que $f$ est convexe.

**Exercice 6 - ****

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$. On définit l'enveloppe convexe de $A$, noté $Conv(A)$ comme l'ensemble des barycentres à coefficients positifs d'éléments de $A$. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Carathéodory (1907) :

$$Conv(A) = \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i a_i, a_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1 \right\}$$

1) Montrer que l'intersection de deux convexes est convexe.
2) Montrer l'inclusion $\supset$.
3) On va montrer l'inclusion $\subset$ par l'absurde. Sot $x \in Conv(A)$ et $\lambda_1 \dots \lambda_p \in \mathbb{R}_+^*, a_1 \dots a_p \in A$ tel que $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i p_i$, $\sum_i \lambda_i = 1$ avec $p$ minimal. Supposons que $p \geq n+2$.
a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_i \alpha_i a_i \neq 0$ ou $\sum_i \alpha_i \neq 0$.
b) On pose $\mu_i : t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda_i + t\alpha_i$. Montrer qu'il existe $\tau \in \mathbb{R}$ tel que :

1. $\mu_i(\tau) \geq 0$ pour tout $i$
2. il existe $i_0$ tel que $\mu_{i_0}(\tau) = 0$

4) Conclure.

**Solution 1**

1) C'est le critère de Cauchy de la convergence des suites : si l'on veut le prouver sans le mentionner, on peut juste prendre $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|P_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq N$. Par l'inégalité triangulaire on obtient le résultat.
2) Puisque en $+\infty$, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré, le fait que le polynôme $P_n - P_N$ soit borné est équivalent au fait d'être constant. Ainsi, $P_n - P_N = c_n$, $c_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \geq N$.
3) Ainsi, $f - P_N = \lim(P_n - P_N)$ est une constante, donc $f$ est un polynôme.

**Solution 2**

1) Soit $x \in [0;1]$. Alors la suite $f_n(x)$ est constante égale à 0 pour $x = 0$ et égale à $\frac{2^n x}{1+2^n n x^2} \equiv \frac{1}{nx} \to 0$, donc la suite de fonction converge simplement vers la fonction nulle.
2) $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx = \left[\frac{\ln(1+2^n nx^2)}{2n}\right]_0^1 = \frac{\ln(1+2^n n)}{2n} \to \frac{\ln 2}{2}$. Comme ce n'est pas $0 = \int_0^1 0dx$, on a par la contraposée du théorème d'intégration uniforme que la suite de fonction ne converge pas uniformément.
3) On cherche un certain $x_n$ tel que $f_n(x_n)$ ne tend pas vers 0. On peut prendre $x = \frac{1}{n}$, alors on a $f_n(x_n) = \frac{\frac{2^n}{n}}{1+\frac{2^n}{n}} \to 1$, et donc la norme infinie de $f_n$ est au moins 1 pour tout $n$, elle ne tend donc pas vers 0 et l'on a pas la limite uniforme.

**Solution 3**

1) La convergence simple se déduit naturellement pour $x > 0$ de $3\ln(n) \leq \sqrt{n}$ à partir d'un certain rang, et donc que $u_n(x) = O(x^2/n^2)$. Pour $x = 0$, c'est la série à termes nulles qui converge.
2) On prend $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, et l'on obtient $u_n(x_n) = e^{-1}$, d'où $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \geq e^{-1}$.
3) On va écrire $u_n(x) = g(\sqrt{n}x)$, avec $g : y \mapsto y^2 e^{-y}$. On peut calculer sa dérivée : $g'(y) = (2y - y^2)e^{-y}$ et on peut rapidement montrer qu'elle est décroissante à partir de $y = 2$, i.e. $u_n$ est décroissante à partir de $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Ainsi, pour $n \geq \frac{4}{a^2}$, on a $a \geq \frac{2}{\sqrt{n}}$ et donc $0 \leq u_n(x) \leq u_n(a)$ par décroissance de $u_n$ à partir de $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Or $u_n(a)$ est le terme d'une série convergente, donc la série des $u_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$.
4) On va montrer que le reste ne converge pas uniformément. D'une part, on sait que $R_n(x) = \sum_{n+1}^{+\infty} u_n(x) \geq u_{n+1}(x)$. Or par la question 2), on sait que la norme infinie de $u_n$ est supérieure ou égale à $e^{-1}$ donc le reste ne converge pas uniformément vers 0.

**Solution 4**

1) exp est convexe.
2) Sa dérivée est $\frac{1}{t\ln t}$ qui est décroissant, d'où sa concavité.
3) On a $\ln\ln(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{2}(\ln\ln a + \ln\ln b)$, et quand on passe à l'exponentielle, on obtient exactement le résultat.

**Solution 5**

On va montrer par récurrence sur $n$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in [\![0; 2^n]\!]$, et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f\left(\frac{p}{2^n}x + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{p}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)f(y)$.

— Pour $n = 0$, c'est direct.
— Supposons l'hypothèse vérifiée en $n \in \mathbb{N}$, et soit $p \in [\![0; 2^{n+1}]\!]$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{p}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{p}{2^{n+1}}\right)y\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2^n}x + \left(\frac{2^n - p}{2^n}\right)y + \frac{2^n}{2^n}y\right)\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{p}{2^n}x + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)\right) + f(y)\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)f(y) + f(y)\right) \\
&\leq \frac{p}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^{n+1}}\right)f(y)
\end{aligned}$$

Par récurrence, l'hypothèse est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or pour tout réel $x, y \in \mathbb{R}$, pour tout $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, $\lambda \in [0; 1]$, il existe une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $p_n \to \lambda$. Par continuité de $f$, l'inégalité que l'on a montré converge vers $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, d'où $f$ convexe.

**Solution 6**

1) Soit $X, Y$ deux convexes. Alors pour toute paire d'éléments $(x, y)$ de $X \cap Y$ et tous $\lambda \in [0; 1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in X$ et $\in Y$ par convexité, donc dans $X \cap Y$.
2) Il faut simplement remarquer que l'ensemble de droite est le même que celui de gauche en fixant la taille de la somme, donc l'inclusion est évidente.
3) a) On définit la fonction

$$\phi : \nu \in \mathbb{R}^p \mapsto (\sum_i \nu_i a_i, \sum_i \nu_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

. C'est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$, or $p > n+1$, donc par le théorème du rang le noyau n'est pas réduit à 0.
b) C'est la partie "fun". Pour avoir $\mu_i(t) \geq 0$, on a deux cas :
— si $\alpha_i = 0$, alors $\mu_i(t) = \lambda_i$ qui est bien positif,
— si $\alpha_i > 0$, il faut que $t \geq -\frac{\lambda_i}{\alpha_i}$ (on remarque que $-\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \leq 0$),
— si $\alpha_i < 0$, il faut que $t \leq -\frac{\lambda_i}{\alpha_i}$ (on remarque que $-\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \geq 0$.
Comme les $\alpha_i$ sont non tous nuls ( 3)a) ), et que leur somme est nulle il existe $i, j$ tels que $\alpha_i < 0, \alpha_j < 0$. Alors, la condition 2 est vérifiée quand $\tau$ est inférieur à tous les $-\frac{\lambda_i}{\alpha_i}$ quand $\alpha_i < 0$. En choisissant $\tau = \max\{-\frac{\lambda_i}{\alpha_i}, \alpha_i > 0\}$ (max pour les $-\frac{\lambda_i}{\alpha_i}$ négatifs). Comme $\tau$ est strictement négatif (max de nombres strictement négatifs), alors $\tau$ respecte les trois points au dessus et on a gagné.
*Je ne m'attendais pas à ce que vous fassiez cette question : mais c'est vraiment pas mal* 4) On a $\phi(\mu(\tau)) = (x + 0, 1 + 0) = (x, 1)$. Ainsi, $x$ s'écrit comme un barycentre à coefficients positifs, et puisque $\tau$ est égal à $-\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}$ pour un certain $i_0$ accomplissant le max. Ainsi, $\mu_{i_0}(\tau) = 0$ et en retirant le terme $i_0$, $x = \sum_{i \neq i_0} \mu_i(\tau)a_i$, ce qui contredit la minimalité de $p$. Ainsi, $p \leq n+1$ et on a gagné.