Colle semaine 15 MP*

Pierre Le Scornet

30 janvier 2021

Cours 1

Énoncer le théorème de convergence dominée.

Cours 2

Énoncer le théorème d'intégration terme à terme de la somme des séries.

Cours 3

Énoncer le théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre. Généraliser aux fonctions $\mathcal{C}^k$.

Exercice 1 - *

Soit $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Écrire I_n sous la forme d'une intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[0; +\infty[$. En déduire la limite des I_n.

Exercice 2 - *

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_n a_n n!$ converge absolument. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n n! = \int_0^{+\infty} \left(e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) dx$$

Exercice 3 - *

Soit $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} dt$.
1) Déterminer le domaine de définition de g.
2) g est-elle continue ?

Exercice 4 - *

Démontrer le théorème de convergence dominée quand on a f_n qui converge uniformément sur tout compact vers f.

Exercice 5 - **

Le but de cet exercice est de démontrer l'égalité $\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^m}$.
1) Justifier l'existence de ces deux membres.
2) Pour $p, q \in \mathbb{N}$, posons $I(p,q) = \int_0^1 x^p (\ln x)^q dx$. Où est-ce que I existe ?
3) Calculer $I(p,0)$ pour $p \in \mathbb{N}$.
4) En déduire $I(p,q)$ sur le domaine de définition de I.
5) En utilisant l'égalité $e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$, montrer que $\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} I(n,n)$.
6) Conclure.

Exercice 6 - **

Soit pour $a > 0$, et $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx - at^2} dt$.
Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que : $F'(x) = \frac{-x}{2a} F(x)$. en déduire $F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-x^2/4a}$.
On pourra utiliser l'égalité suivante : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Bonus :

Montrer que pour $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u, v : I \to \mathbb{R}$ continues, montrer que $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt$ est continue sur I.

Solution 1

1) L'important est de ne pas se faire de noeuds au cerveau : une bonne fonction continue par morceaux ici serait simplement $f_n(x) = \mathbb{1}_{[0;\sqrt{n}]}(x)(1 - \frac{t^2}{n})^n$. Cette fonction est bien intégrable puisque cpm et nulle à partir de $\sqrt{n}$.
2) On va essayer d'appliquer le théorème de convergence dominée. D'abord, pour $x \in \mathbb{R}_+$, APCR on a $f_n(x) \to_n e^{-t^2}$ qui est bien continue. De plus, on a $|f_n(t)| = e^{n\ln(1-\frac{t^2}{n})} \leq e^{-t^2}$ qui est intégrable (et ne dépend plus de n). f_n et f sont positives, continues, intégrables, donc par convergence dominée on conclut.

Solution 2

On va vouloir utiliser le théorème d'intégration terme à terme. L'hypothèse centrale est que la somme des intégrales des valeurs absolues de $a_n x^n e^{-x}$ converge : or $\int_0^{+\infty} |a_n x^n e^{-x}| = |a_n| n!$ (on peut le montrer par une récurrence immédiate en faisant des IPP), qui est sommable selon l'hypothèse de l'exercice. Qu'est ce qu'il nous manque comme hypothèse pour appliquer le théorème ? La fonction $x \mapsto a_n x^n e^{-x}$ est bien continue, la somme converge (car pour tout x $a_n x^n = o(|a_n| n!)$), et la somme est continue par convergence normale sur tout compact. On a donc tout ce qu'il faut pour la permutation série intégrale, ce qui donne le résultat demandé.

Solution 3

C'est bien défini pour $x > 0$ (fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$, qui tend vers 1 en 0 et qui est un petit o de $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$). On va utiliser le théorème de continuité des intégrales définies par des paramètres. On vérifie les trois conditions du théorème : la fonction $f : x, t \mapsto e^{-xt}/\sqrt{t+1}$ est continue en x, continue par morceaux en t, et si l'on impose $x \leq a$ on peut définir $\varphi_a(t) = \frac{e^{-at}}{\sqrt{t+1}}$. Elle est intégrable et $|f(x,t)| \leq \varphi_a(t)$ pour $x \leq a$, donc la fonction g est continue sur $[0; a]$ pour tout a donc continue sur $[0; +\infty[$.

Solution 4

Chaque f_n est intégrable puisque φ l'est et $|f_n| \leq \varphi$, et de même pour f en passant à la limite simple cette inégalité. Maintenant, on veut démontrer que $\int_\alpha^\beta f_n - \int_\alpha^\beta f$, avec $I =]\alpha; \beta[$ tend vers 0 en epsilonant. Le problème étant que la suite ne converge pas uniformément globalement mais seulement sur tout compact, on ne peut pas utiliser le théorème de la semaine précédente. On va quand même l'utiliser : puisque f est intégrable sur $]\alpha; \beta[$, il existe $\alpha < a < b < \beta$ tel que $\int_\alpha^a \varphi$ et $\int_b^\beta \varphi$ sont $\leq \epsilon$. Ensuite, on va se placer sur $[a; b]$ et par convergence uniforme sur tout compact (particulièrement $[a;b]$), on a un certain rang n_0 à partir duquel $|\int_a^b f_n - f| \leq \epsilon$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha^\beta f_n - f\right| &= \left|\int_\alpha^a f_n - f + \int_b^\beta f_n - f + \int_a^b f_n - f\right| \\ &\leq 2\int_\alpha^a \varphi + 2\int_b^\beta \varphi + \left|\int_a^b f_n - f\right| \\ &\leq 5\epsilon\end{aligned}$$

Solution 5

3) $I(p,0) = \frac{1}{p+1}$.
4) On intègre par parties, pour $q \geq 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^p(\ln x)^q dx &= \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}(\ln x)^q\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{p+1}x^{p+1}\frac{q}{x}(\ln x)^{q-1}dx \\ &= -\frac{q}{p+1}I(p,q-1).\end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence sur q on peut montrer que :

$$I(p,q) = (-1)^q\frac{q!}{(p+1)^q}I(p,0) = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$$

5) On écrit simplement $\frac{1}{x^x} = e^{-x\ln x}$. Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^x} &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n(\ln x)^n dx \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n(-\ln x)^n dx\end{aligned}$$

Par le théorème de convergence monotone (tout est positif et mesurable), on a l'égalité demandée. Si l'on veut utiliser le théorème de convergence dominée sur la somme partielle, on va utiliser la domination suivante :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n!}x^n(\ln x)^n\right| &\leq \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}x^n(-\ln x)^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n(-\ln x)^n \leq \frac{1}{x^x},\end{aligned}$$

Ainsi, le théorème de convergence dominée est applicable sachant que la fonction $\frac{1}{x^x}$ est intégrable. Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!}x^n(\ln x)^n dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^x}$$

i.e. exactement l'égalité demandée.

6) On applique la question 4) pour $I(n,n)$ et on obtient l'égalité demandée.

Solution 6

D'abord, F existe bel et bien puisque $|e^{-itx-at^2}| = e^{-at^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. Or $f : (x,t) \mapsto e^{-itx-at^2}$ est $\mathcal{C}^1$ en x et sa dérivée en x est continue en (x,t) (il suffirait qu'elle soit continue par morceaux en t et continue en x). On a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-ite^{-itx-at^2}\right| \leq |t|e^{-at^2}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ et ne dépend pas de x. Ainsi, par le théorème sur le caractère $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètres, F est $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-itx-at^2}$$

, et donc par IPP :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[\frac{i}{2a}e^{-at^2}e^{-itx}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2a}e^{-at^2}(-ixe^{-itx})dt \\ &= -\frac{x}{2a}F(x). \end{aligned}$$

2) Le 1) donne une équation différentielle que respecte F, donc $F(x) = F(0)e^{-x^2/4a}$ et on calcule $F(0)$ par changement de variable sur la remarque.