Colle semaine 1

Pierre Le Scornet

17 septembre 2020

Exercice 1 - **

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. on définit $v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}$.
1) Supposons que $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Quelle est la nature de $\sum_{n\geq 0} u_n$? de $\sum_{n\geq 0} v_n$?
2) Supposons que $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent. Montrer que $\sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n v_n}$.
3) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Solution

1) C'est du cours pour $\sum u_n$, et pour v_n il suffit de regarder comment se comporte $1 + n^{2-\alpha}$, et donc pour $\alpha < 1$ la série des v_n converge, sinon elle diverge. On remarque que dans ce cas, les deux séries ne peuvent pas converger ensemble.
2) On utilise l'inégalité $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ (qui vient de $(a-b)^2 \geq 0$).
3) Par l'absurde, supposons qu'elles convergent toutes les deux. Alors $\sum \sqrt{u_n v_n}$, et $n^2 u_n \to +\infty$. Ainsi, $u_n v_n \sim \frac{u_n}{1+n^2u_n} \sim \frac{1}{n^2}$, ce qui contredit $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.

Exercice 2 - *

1) Démontrer le théorème de comparaison série-intégrale.
2) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^2(n)}$?

Solution

1) Cours
2) On utilise le théorème précédent avec $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ qui est positive décrois-

sante sur [2;. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2(t)}dt = \left[-\frac{1}{\ln}\right]_2^{+\infty}$ qui est bien convergente, donc par le théorème de comparaison série-intégrale, notre série converge.

Exercice 3 - *

1) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive et décroissante telle que $\sum u_n$ converge, alors $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2) La réciproque est-elle vraie ? Si non, donner un contre-exemple.

Indication

1) On epsilonne le fait que le reste de la série tende vers 0 :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=n_\epsilon+1}^{+\infty} u_n < \epsilon$$

Alors par décroissance de u, on a :

$$\forall p > n_\epsilon, (p - n_\epsilon)u_p \leq \sum_{n=n_\epsilon+1}^{p} u_n < \epsilon$$

et puisque $n_\epsilon u_p \longrightarrow_{p\to+\infty} 0$, on a bien $pu_p < \epsilon$ à partir d'un certain rang.
2) Elle n'est pas vraie, par exemple $\sum \frac{1}{n\ln n}$

Exercice 4 - **

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
1) Dans le cas $\alpha > 1$, montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2) Déterminer la limite de (u_n) selon la valeur de α.
3) Dans le cas $\alpha > 1$, notons $v_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 0} v_n$ selon la valeur de α.

Solution

1) Du cours en remarquant que u_n est une inférieure au reste des $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ qui converge.
2) différencier les cas selon le signe de α. Dans le cas positif, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}dt$$

Or $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha}$. Donc :

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n}^{2n} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

Pour $\alpha = 1$, les deux côtés tendent vers $\ln 2$. Pour $\alpha \neq 1$

$$\frac{(2n+1)^{1-\alpha} - (n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{(2n)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Pour $\alpha > 1$, les deux côtés tendent vers 0. Pour $0 < \alpha < 1$, les deux côtés divergent.
Pour $\alpha = 0$, la suite diverge "grossièrement". Pour $\alpha < 0$, on inverse le sens des inégalités car la fonction passe de décroissante à croissante, et pour $\alpha < 0$ les deux côtés divergent.
3) On fait pareil avec des comparaisons séries intégrales :

$$\int_{n+k}^{n+k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{(n+k)^\alpha} \leq \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

On somme :

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq v_n \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

et les deux côtés sont termes d'une série convergente ssi $\alpha > 2$.

Exercice 5 - *

Notons $u_n = \frac{1}{\ln n} \left(2 + \frac{3^2}{2^3} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right)$, pour $n \geq 2$. Montrer que cette suite converge et calculer sa limite.

Indication

Les termes de la somme entre parenthèses est $\frac{(k+1)^k}{k^{k+1}} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \frac{1}{k} \sim \frac{e}{k}$.

Exercice 6 - **

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs, telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\frac{a}{n}+O(\frac{1}{n^2})}$, $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^a}$.

Indication

Il faut étudier $n^a u_n$, on va poser $v_n = \ln(n^a u_n)$. Pour montrer qu'il converge, on va montrer que la série des $w_n = v_{n+1} - v_n$ converge.

$$\begin{aligned}
w_n &= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^a\right) + \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} \\
&= a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Donc $\sum w_n$ converge, donc v converge, donc $(n^a u_n)_n$ converge vers un $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n \sim \frac{\lambda}{n^a}$.

Exercice 7 - *

Étudier la nature des séries dont le terme général est :

- $e^{\sin n}$
- $\frac{1}{n^{n+2}}$
- $\sin^2(\pi(n+\frac{1}{n}))$
- $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$
- $n^{\frac{1}{n^2}} - 1$
- $\frac{n^n(n!)^2}{(3n)!}$

Solution

1) Diverge grossièrement car supérieur à e^{-1}
2) $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc la série converge.
3) $\sin(\pi n + \pi\frac{1}{n}) = (-1)^n \sin(\frac{\pi}{n})$ (à partir d'un certain rang), $\equiv (-1)^n\frac{\pi}{n}$. Ainsi, $\sin^2(\pi(n+\frac{1}{n})) \equiv \frac{\pi^2}{n^2}$ qui converge, donc la série converge.
4)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n} &= \left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{2n} \\
&= \exp(2n\ln(1-\frac{2}{n+1}))
\end{aligned}$$

Or $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$, donc $2n\ln(1-\frac{2}{n+1}) \sim -\frac{4n}{n+1} \equiv -4$, donc notre suite converge vers e^{-4}.
5)

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{n^2}} &= \exp(\frac{1}{n^2}\ln n) \\ &= 1 + \frac{\ln n}{n^2} + O(\frac{\ln^2 n}{n^4}) \end{aligned}$$

Donc $n^{\frac{1}{n^2}} - 1$ est la somme de deux suites dont la somme converge, donc la série de ces termes converge.
6) Par Stirling ou par le critère de Cauchy, on montre que ça converge.